现代数学基础丛书 141

拓扑动力系统

——从拓扑方法到遍历理论方法

周作领　尹建东　许绍元　著

科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

现代数学基础丛书 141

拓扑动力系统

——从拓扑方法到遍历理论方法

周作领 尹建东 许绍元 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书从线段动力系统、圆周动力系统、符号动力系统到一般动力系统，从纯拓扑方法到遍历理论方法，系统地介绍拓扑动力系统的基本内容，并结合这些基本内容的介绍，总结了作者 30 多年来在这些方面的科研成果. 本书共分七章和三个附录，第 1 章在最一般意义下介绍拓扑动力系统的研究框架；第2章讨论一维(线段和圆周)动力系统；第3章讨论符号动力系统；从第4章，开始讨论一般动力系统，系统介绍从遍历理论基本思想引申出的几个基本问题，包括测度中心和极小吸引中心、弱和拟弱几乎周期点以及由此得到的点的轨道结构的三个层次等. 本书主要讨论离散半动力系统，第 7 章把离散系统的弱几乎周期点概念推广到流的情形. 前两个附录分别介绍必备的集合论和点集拓扑以及遍历理论知识，而附录 C 则是一篇深入讨论流的性质的文章.

本书可供数学专业高年级本科生和动力系统方向研究生、教师学习使用，亦可供相关专业科研人员和技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

拓扑动力系统：从拓扑方法到遍历理论方法/周作领，尹建东，许绍元著. —北京：科学出版社，2011

（现代数学基础丛书；141）

ISBN 978-7-03-032586-0

I. ①拓… II. ①周… ②尹… ③许… III. ①拓扑-动力系统（数学）IV. ①O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 214472 号

责任编辑：赵彦超／责任校对：陈玉凤

责任印制：钱玉芬／封面设计：陈　敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2011年12月第一版　开本：B5(720×1000)

2011年12月第一次印刷　印张：15 1/4

印数：1－2 000　字数：289 000

定价：58.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前　言

在历史上, 动力系统的发展与遍历理论 (不变测度理论) 密不可分. 前者讨论的是群在拓扑空间上的连续作用, 后者则研究群在测度空间上的保测作用. 在紧致可度量拓扑空间上存在一个自然的测度结构, 即 Borel σ 代数, 其上的连续作用成为可测作用. 这就给使用遍历理论方法研究动力系统架起一座桥梁. 紧致系统的遍历理论是由苏联数学家 Kryloff-Bogoliouboff 在 1937 年建立的, 经众多数学家的多年辛勤耕耘, 这一理论已臻成熟. 值得一提的是, 我国已故杰出数学家廖山涛院士早在近代微分动力系统创建的初期, 就洞悉遍历思想和方法的巨大潜力, 最早把它引进近代微分动力系统的研究中来, 开启了目前已非常活跃的微分动力系统的遍历理论的研究先河, 对近代微分动力系统的创建和发展作出了巨大贡献. 拓扑动力系统是只依赖紧致性和连续性的动力系统. 在这个意义上, 它是整个动力系统的基础. 近几十年才引进和发展起来的熵的概念和混沌 (紊动) 现象也只依赖于紧致性和连续性, 因而自然成为拓扑动力系统的研究对象. 事实上, "非游荡集 - 拓扑熵 - 混沌" 构成了拓扑动力系统的一个重要研究骨架, 对它们及其间联系的研究可以带动整个拓扑动力系统的发展. 而从纯拓扑方法到引进遍历理论方法, 可以使人们在研究中紧紧抓住本质而不为表象所迷惑, 使研究得以深入一步. 本书作者三十年来正是遵循这样一条路线从事拓扑动力系统的研究的.

本书主要选材于作者三十年来的研究工作中所先后涉猎过的内容, 因而也是作者所熟悉的内容. 这就难免挂一漏万, 远不能概括拓扑动力系统的全貌, 因为作者所熟悉的不过是动力系统的一角而已. 特别是近年来崛起的拓扑动力系统在组合数论中的应用, 更是远未涉及 (建议有兴趣的读者可参阅文献 [51] 和 "2011 年国际可测与拓扑动力系统及相关课题黄山会议" 文献). 本书首先讨论线段动力系统, 这是作者于 20 世纪 70 年代在恩师廖山涛教授指引下在国内最先开始研究的领域. 那个时候, 动力系统这一学科还刚刚创建不久, 动力系统的一些新名词和新概念还不为人们所了解, 诸如回复点和非游荡点乃至异状点 (homoclinic point) 等, 人们对它们还远没有感性认识, 例如, Block 曾发表文章, 证明线段自映射的非游荡集基数有限, 则非游荡集与周期点集重合, 即每一个非游荡点都是周期点. 这样的文章在今天当然不能发表, 因为它太简单了, 可在三四十年前却需要证明一番人们才能理解. 线段动力系统是最简单的动力系统, 不过这里所谓简单是在下述意义下的简单, 即任何一般动力系统, 只要底空间包含线段的连续像作为子空间, 那么线段动力系统都是这样动力系统的特殊情形, 而绝非每个线段动力系统都很简单, 存在可以复杂

到什么程度的线段动力系统人们是远不清楚的. 例如, 线段动力系统可以有无穷拓扑熵. 但线段动力系统毕竟更直观, 是唯一可以做出图像的动力系统, 也就是每一个点的轨道都可以在其图像中归纳地显示出来. 这当然给人们带来极大方便, 使得人们更容易理解和把握动力系统基本概念. 在线段动力系统之后, 本书讨论的是圆周动力系统. 线段和圆周是唯有的两个连通一维紧流形, 前者是带边的, 后者不带边, 因此线段动力系统和圆周动力系统很相近, 几乎通过提升概念可以把圆周动力系统转化线段动力系统来研究. 但两者有一个重大区别, 即线段动力系统严格遵从 Sharkovskii 定理, 而圆周动力系统可以有其他周期点但无 2 周期点的情况发生. 我们对一维动力系统的讨论可谓详尽, 这可以弥补文献 [51] 的不足. 在圆周动力系统之后, 我们讨论符号动力系统. 符号动力系统是特殊的动力系统, 它本身具有理论意义, 有很多有趣的问题需要解决, 如我们至今还没有得到一个非有限型子转移有零熵的充要条件. 另外, 也许更重要的是符号动力系统在整个动力系统理论中 (包括微分动力系统) 和分形几何中都有广泛的应用, 而且在计算机理论中也有重要应用, 如所谓胞腔自动机事实上就是符号动力系统. 线段动力系统和符号动力系统都是特殊动力系统, 受底空间的制约, 它们的某些性质往往具有特殊性而不具有一般性, 例如对线段动力系统而言, 周期轨道在线段上的分布不同, 所决定的动力性状往往可以大相径庭, 在一般情形就不存在这样的问题, 因为这是由线段的良序性质决定的. 但有些性质则存在可否向一般情形推广的问题, 如 Sharkovskii 定理在一般情形是否成立? 特殊情形的结果, 即使在一般情形下也可以提问, 但不一定成立. 如对线段动力系统而言, 限制在非游荡集上的混沌与正熵等价, 但在一般情形却不成立. 线段动力系统和符号动力系统有某种试验区的作用, 一个一般性的问题, 往往要先看看对特殊情况是否成立, 成立之后再考虑向一般情形推广. 这往往是一种考虑问题的方法. 在线段动力系统和符号动力系统的讨论中, 我们基本上使用的都是拓扑方法, 没有涉及遍历理论方法. 但实际上, 遍历理论方法在线段动力系统和符号动力系统中也有突出的结果, 例如, 对线段动力系统而言, Bowen-Franks 定理的证明[16] 是很不简单的, 要用到代数拓扑的工具, 而 Misiurewicz[40] 用遍历理论方法给出一个相对简单的证明.

在符号动力系统之后, 我们就转向一般动力系统的讨论, 并在纯拓扑方法之外, 引进遍历理论方法或紧致系统的不变测度理论. 如前所述, 这一理论是苏联数学家 Kryloff-Bogoliouboff 于 1937 年所建立, 现在在动力系统研究中已经蔚然成风, 成为最重要的组成部分. 按作者的体会, 遍历理论方法的运用可以使人们在研究中抓住本质而不为假象所迷惑. 基于这种思想, 我们在紧致系统中引进测度中心或极小吸引中心的概念, 而为了决定测度中心的结构, 我们放宽几乎周期点的条件, 引进弱几乎周期点和拟弱几乎周期点的概念, 在传统意义下五个回复层次中又加入了两个

新层次. 这些内容的讨论构成本书后半部分的主要篇章. 本书基本上包含了作者关于动力系统的全部工作.

本书没有引进族的概念, 因为我们过去的研究中基本没有涉及这个概念, 而且在文献 [51] 中有较详尽的讨论, 有兴趣的读者可参阅该书.

本书共分七章和三个附录. 第 1 章在一般的框架下介绍拓扑动力系统的定义、概念和已知的基本命题. 第 2 章和第 3 章分别讨论一维动力系统 (线段动力系统和圆周动力系统) 和符号动力系统. 它们本身都是可以自成体系的独立研究领域, 均有专著出版. 但我们是把它们当作本书从特殊情形到一般情形的过渡而刻意安排当作特殊情形加以考虑的: "在特殊情形下得到的结论在一般情形下是否仍然成立?" 曾是我们开展一般拓扑动力系统研究的动力之一. 当然, 符号动力系统还是一种非常有用的工具, 特别是在构造反例方面. 第 1 章和第 3 章的内容在文献 [57] 中已有较详尽的论述, 但出于本书封闭性的考虑, 我们不得不把它们列为本书的一个章节, 而为了节省篇幅, 我们采取的是 "叙而不证" 的策略. 从第 4 章起, 我们开始讨论一般拓扑动力系统, 即紧致可度量空间上的连续自映射, 介绍沿点的轨道生成的系统的不变测度的性质以及其他一些基本遍历理论内容. 第 5 章从 "寻求保持原系统全部重要动力性状的最小子系统" 出发, 引进 "测度中心" 的概念和它的另一种描述——极小吸引中心. 第 6 章在两个回复性新层次——弱和拟弱几乎周期点及测度中心的基础上, 讨论点的轨道的层次问题和混沌的层次问题. 第 7 章把本书关于离散系统的理论推广到流上去, 但关于流的讨论没有深入展开. 附录 A 介绍集合论和拓扑的基础知识. 拓扑动力系统, 顾名思义, 拓扑方法是最基本的方法. 为了照顾大多数读者, 我们介绍了集合论和点集拓扑的基本内容, 这部分内容对读过点集拓扑的读者没有任何困难. 附录 B 简单介绍测度论遍历理论基础[50]. 这部分内容对较多读者可能是不熟悉的, 因而我们的介绍略详尽些, 但只是叙述而不加证明, 读者如能掌握这些内容, 就可以顺利阅读本书. 特别需要声明的是, 掌握附录的内容是阅读本书后半部分的必要条件. 黄煜和周作领对流涉及弱几乎周期点乃至测度中心等作了详尽的讨论, 形成一篇完整的文章, 作为附录 C 列于本书之后[29], 供有兴趣的读者参考.

本书写作得到很多人的帮助. 我首先要感谢的是文兰院士、叶向东教授、苏维宜教授、井竹君教授、吴敏教授, 感谢他们对本书作了热情洋溢的推荐, 使得我们申请国家科学技术学术著作出版基金成功. 另外, 我还要感谢黄煜教授、朱智伟教授、罗俊教授和李浩副教授, 他们也给作者很多帮助, 特别是在本书的排版和纠错方面. 没有他们的帮助, 本书是无法完成的.

最后, 限于作者的水平和知识面, 本书难免挂一漏万, 不当甚至错误之处也在所难免, 敬希读者不吝赐教.

本书的出版得到国家自然科学基金 (项目批准号：10971236) 和国家科学技术学术著作出版基金的支持.

周作领

2011 年 7 月 1 日

目　　录

符 号 表

$A(f)$	f 的几乎周期点集
$B(x,r)$	x 的半径为 r 球形 (开) 邻域或 r 邻域
$B(E,r)$	集合 E 的半径为 r 的球形 (开) 邻域
$\mathfrak{B}(X)$	空间 X 的 Borel σ 代数
C	中间三分 Cantor 集
$\mathcal{C}$	空间的紧致集合族
$C(X)$	紧致度量空间 X 上全体复连续函数的空间
$\overline{D}_c^s(E,x)$	集合 E 在点 x 处的上凸密度
$\mathrm{ent}(f)$	连续自映射 f 的拓扑熵
$\overline{E}$	集合 E 的闭包
$\dim_B$	盒维
$\underline{\dim}_B$	下盒维
$\overline{\dim}_B$	上盒维
$\dim_H$	Hausdorff 维数
$\dim_P$	填充 (packing) 维数
$\|E\|$	集合 E 的直径
$h_m(f)$	保测映射 f 的测度熵
$H^s(E)$	集合 E 的 s 维 Hausdorff 测度
$L^n(E)$	集合 E 的 n 维 Lebesgue 测度 (体积)
$\mathbb{N}$ 或 $\mathbb{Z}_+$	全体自然数或正整数
$S(f)$	紧致系统 (X,f) 的支撑点的集合
S_m	测度 m 的支撑
Σ	有限符号空间
$\sigma:\Sigma\to\Sigma$	符号空间上的转移自映射

第 1 章 动力系统基础

在拓扑动力系统的讨论中, 有一些概念是不可须臾或离的, 它们构成了一般拓扑动力系统研究的基础和基本框架, 任何特殊系统的讨论都围绕它们进行. 这些概念包括拓扑动力系统的定义、子系统、回复性、传递性、混合性以及拓扑共轭和半共轭等, 还有就是拓扑熵和混沌. 本章的目的是在最一般的意义下给出这个框架. 所涉及的基本性质 (命题) 一般不再给出证明, 读者可参考有关文献, 如文献 [11], [50], [51], [57], [58] 等.

1.1 拓扑动力系统的一般定义

设 X 为紧致可度量空间, $f: X \to X$ 为从 X 到其自身的连续映射. f 可以看作是 X 上的连续作用: X 的每一点在 f 的作用下生成像点 $f(x)$, 它仍然在 X 中, 可以对它继续作用, 生成像点 $f^2(x) = f(f(x))$. f^2 仍然是 X 上的自映射. 这个过程显然可以无限进行下去, 于是得到 X 上的一个连续自映射的序列: $f^0 = id$, 即 X 的恒同映射, $f^1 = f$, $f^2 = f \cdot f$. 一般地, 对 $n > 1$, $f^n = f^{n-1} \cdot f$, 其中的 $\cdot$ 表映射的复合.

定义 1.1.1 X 上的连续自映射序列

$$\{f^0, f^1, \cdots, f^n, \cdots\}$$

称作 X 上由连续自映射 f 经迭代而生成的拓扑离散半动力系统.

当 f 是 X 上的自同胚时, 有相反方向的迭代, 因而得到

$$\{\cdots, f^{-n}, \cdots, f^{-1}, f^0, f^1, \cdots, f^n, \cdots\},$$

叫做 X 上由自同胚 f 经迭代而生成的拓扑离散动力系统. 本书主要讨论拓扑离散半动力系统, 只在最后一章讨论拓扑流, 其定义在第 7 章给出. 对 X 和 f 加上可微性条件, 可以定义微分离散动力系统或半动力系统, 亦可以定义可微流, 本书不涉及.

设 d 是 X 的一个拓扑度量. 用 $C^0(X)$ 表示 X 上全体连续自映射的集合. 下面在 $C^0(X)$ 上定义一个度量, 使得 $C^0(X)$ 成为完备度量空间.

定义 1.1.2 令

$$\rho: C^0(X) \times C^0(X) \to \mathbb{R}^+,$$

使得

$$\rho(f,g)=\sup_{x\in X}\{d(f(x),g(x))\},\quad \forall f,g\in C^0(X).$$

据 X 的紧致性, ρ 是有定义的, 且易于验证它是 $C^0(X)$ 上的一个度量. 进而, 可以证明在这个度量下 $C^0(X)$ 是一个完备空间, 也就是 $C^0(X)$ 上的柯西序列收敛到其上一点. 此后, 用 $f\in C^0(X)$ 或 (X,f) 表示由紧致可度量空间 X 上的连续自映射 f 生成的拓扑离散半动力系统, 简称动力系统或紧致系统.

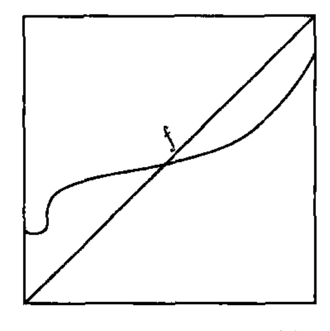


图 1.1.1　线段自映射 f

例 1.1.1　设 $X=I=[0,1]$, 即 X 是闭线段. (X,f) 叫做线段自映射或线段动力系统. 线段动力系统是最简单的动力系统, 是唯一可以画出相图的动力系统, 如图 1.1.1 所示.

例 1.1.2　设 $X=S^1$, 即单位圆周. (X,f) 叫做圆周自映射或圆周动力系统.

1.2　不变集与子系统

设 (X,f) 为紧致系统. 如果紧致子集 $X_0\subset X$ 对 f 不变, 即

$$f(X_0)\subset X_0,$$

则把 f 在 X_0 上的限制映射

$$f|_{X_0}:X_0\to X_0$$

所生成的紧致系统 $(X_0,f|_{X_0})$ 或 $f|_{X_0}$ 称作紧致系统 (X,f) 或 f 的子系统. 子系统在动力系统研究中扮演重要角色. 一般说来, 给定一个紧致系统 (X,f), 我们要研究的是它的动力性状, 例如下面将要定义的周期轨道的存在性等. 很显然, f 的每一个子系统的动力性状都是 (X,f) 的动力性状的一部分, 而 (X,f) 的全部动力性状可由它的全体子系统所决定.

对每一点 $x\in X$, x 在 f 的作用下生成的轨道

$$\{x,f(x),f^2(x),\cdots,f^n(x),\cdots\}$$

记作 $\mathrm{orb}(x)$.

我们将会看到, 动力系统的问题是多种多样的, 但其核心问题却是轨道的渐近性质或拓扑结构, 即当 $n\to\infty$ 时轨道的极限性质. 在这个意义下, 轨道的概念是动力系统最基本的概念之一.

设 $x \in X$, 易见轨道 $\text{orb}(x)$ 是对 f 不变的, 它不是紧致集合, 不能生成子系统. 但它的闭包, 即 $\overline{\text{orb}(x)}$ 是紧致的, 且显然也是对 f 不变的. 因此得到子系统

$$f|_{\overline{\text{orb}(x)}} : \overline{\text{orb}(x)} \to \overline{\text{orb}(x)}.$$

X 的每一点在 f 的作用下都生成一条轨道, 因此 X 的每一点都可以生成一个子系统. 这些子系统, 即

$$\{f|_{\overline{\text{orb}(x)}} : \forall x \in X\}$$

是 f 的最基本的子系统, 它们可以决定 f 的全部动力性状. 本书的一个基本想法是寻求 X 的一个 "最小" 的紧子集 X_0, 使得

$$\{f|_{\overline{\text{orb}(x)}} : \forall x \in X_0\}$$

亦可以决定 f 的全部动力性状.

1.3 回 复 性

如我们在上一节所说, 动力系统的核心问题是轨道的渐近性质或拓扑结构. 以后将会看到, 只有那些具有某种回复性质的点的轨道才是重要的. 为此, 下面先引进回复性的概念.

设 (X, f) 是紧致系统.

定义 1.3.1 *对 X 中一点 x, 如果存在 $n > 0$, 使得 $f^n(x) = x$, 则称 x 是 f 的周期点, 并称使 $f^n(x) = x$ 成立的最小的正整数 n 为 x 的周期.*

f 的全体周期点的集合记作 $P(f)$, f 的所有可能的周期的集合记作 $p(f)$. 周期为 1 的周期点称作 f 的不动点, f 的全体不动点的集合记作 $F(f)$. 易于证明, $F(f)$ 是 f 的闭子集.

周期性是最强的回复性, 也是最重要和最基本的回复性. 下面陆续引进的回复性都是周期性的推广.

容易举例说明, 不动点的集合可以是空的, 周期点的集合也可以是空的. 例如, 线段自映射一定有不动点, 但圆周自映射却可以没有不动点, 也可以没有周期点.

设 $x \in X$. 若存在 $n > 0$, 使得 $f^n(x) \in P(f)$, 则称 x 是 f 的一个终于周期点 (eventually periodic point), 并称 $f^n(x)$ 的周期轨道是 x 进入的周期轨道, 全体终于周期点的集合记为 $EP(f)$. 易见 $P(f) \subseteq EP(f)$.

定义 1.3.2 *对于 $x \in X$, 如果存在正整数递增序列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使得*

$$\lim_{i \to \infty} f^{n_i}(x) = x,$$

则称 x 是 f 的一个回复点.

易于证明上述定义等价于: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n > 0$, 使得

$$f^n(x) \in V(x, \varepsilon),$$

这里 $V(x,\varepsilon) = \{y \in X | d(x,y) < \varepsilon\}$ 是 x 的半径为 ε 的球形邻域, 其中 d 是 X 的一个拓扑度量. 显然回复性是周期性的推广. f 的全体回复点的集合记作 $R(f)$, 以后将会看到, 回复点集总是不空的.

定义 1.3.3 *设 $x \in X$, 如果存在 $\varepsilon > 0$, 使得*

$$f^n(V(x,\varepsilon)) \cap V(x,\varepsilon) = \varnothing, \quad \forall n > 0,$$

则把 x 称作 f 的一个游荡点. 如果 x 不是 f 的游荡点, 即对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $n > 0$, 使得

$$f^n(V(x,\varepsilon)) \cap V(x,\varepsilon) \neq \varnothing,$$

则称 x 为 f 的一个非游荡点.

从定义不难看出 f 的全体游荡点的集合是 X 的开子集. 因此 f 的全体非游荡点的集合是 X 的闭子集, 记作 $\Omega(f)$.

从定义易于验证

$$F(f) \subseteq P(f) \subseteq R(f) \subseteq \Omega(f),$$

且它们都是 f 的不变子集. 例如

$$f(R(f)) \subset R(f)$$

等. X 的这个子集合序列构成了 f 的回复性的几个不同层次, 随着本书内容的陆续展开, 我们还要在它们之间加进几个另外的层次. 可以举例说明, 上述包含关系的每一个都可以是真包含, 而且中间两个一般不是紧子集. 再者, 回复点是点本身的回复, 而非游荡点则是该点的邻域的回复. 非游荡性是最弱的回复性. 限制在非游荡集上的子系统

$$f|_{\Omega(f)} : \Omega(f) \to \Omega(f)$$

是最重要和最基本的子系统, 在某种意义下它可以代替原系统而保留全部动力性状不变.

1.4 ω 极限集

设 (X, f) 为紧致系统.

定义 1.4.1 设 $x \in X$. 如果存在正整数递增序列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = y,$$

则把点 y 称作 x 的一个 ω 极限点, 并称 x 的全体 ω 极限点的集合为它的 ω 极限集, 记作 $\omega(x,f)$.

易于证明

$$\omega(x,f) = \bigcap_{n>0} \overline{\bigcup_{k\geqslant n} \mathrm{orb}(f^k(x))}.$$

当 x 是 f 的 n 周期点时, 显然

$$\omega(x,f) = \mathrm{orb}(x) = \{x, f(x), \cdots, f_{(x)}^{n-1}\}.$$

ω 极限集描述了轨道的渐近性质或拓扑结构. 在这个意义上可以说它是动力系统最基本和最重要的概念之一.

下述几个命题证明简单, 从略 (读者可参考文献 [58]).

命题 1.4.2 设 $x \in X$. 则 $\omega(x,f)$ 是 X 的非空闭子集.

命题 1.4.3 设 $x \in X$. 则

$$f(\omega(x,f)) = \omega(x,f) = \omega(f^i(x), f), \quad \forall i \geqslant 0.$$

f 限制在 ω 极限集上的子系统是最重要的子系统.

命题 1.4.4 设 $x \in X$. 则

$$x \in R(f) \Leftrightarrow x \in \omega(x,f).$$

定义 1.4.5 设 $x \in X$. 若存在 $p \in P(f)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p)) = 0,$$

则称 x 为 f 的一个渐近周期点. 当存在 $k > 0$, 使得

$$f^k(x) \in P(f)$$

时, x 称为 f 的一个终于周期点.

显然, 终于周期点是渐近周期点. 易于举例说明, 终于周期点可以不是周期点, 渐近周期点也可以不是终于周期点. 再者, 易于看出非周期的渐近周期点不是回复点. f 的渐近周期点集用 $AP(f)$ 表示.

下述命题的证明可参见文献 [57].

命题 1.4.6 设 $x \in X$. 则

$$x \notin AP(f) \Rightarrow \omega(x,f)$$

不可数.

命题 1.4.7 设 $x \in X$. 则对任意 $n > 0$, 有

(1) $\omega(x,f) = \bigcup_{i=0}^{n-1} \omega(f^i(x), f^n)$;

(2) $f(\omega(f^i(x), f^n)) = \omega(f^{i+1}(x), f^n), i = 0, 1, \cdots, n-1$;

(3) $f(\omega(f^{n-1}(x), f^n)) = \omega(x, f^n)$.

命题 1.4.8 $R(f^n) = R(f), \forall n > 0$.

1.5 拓扑传递性与拓扑混合性

设 (X, f) 为紧致系统.

定义 1.5.1 f 叫做拓扑传递的, 如果存在 $x \in X$, 使得 $\overline{\mathrm{orb}(x)} = X$, 即 x 的轨道在 X 中处处稠密.

下述命题给出拓扑传递性的几个等价条件, 从不同角度刻画了拓扑传递性这一重要概念, 它们中的每一个都可以作为拓扑传递性的定义. 它的证明可参见文献 [50],[57]. 先回忆拓扑学的一个概念: X 的一个子集合叫做 G_δ 型集, 如果它是可数个开集的交集.

命题 1.5.2 设 $f(X) = X$, 即 f 是在上的. 则下述诸条件是等价的:

(1) f 是拓扑传递的;

(2) 若 $\Lambda \subset X$ 闭且 $f(\Lambda) \subset \Lambda$, 则 $\Lambda = X$ 或 Λ 在 X 内无处稠密;

(3) 若 $\mathcal{O} \subset X$ 开且 $f^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$, 则 $\mathcal{O} = \varnothing$ 或 $\mathcal{O}$ 在 X 中处处稠密;

(4) 对任意非空开集 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$, 存在 $n > 0$, 使得 $f^{-n}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \varnothing$;

(5) 对任意非空开集 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$, 存在 $n > 0$, 使得 $f^n(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \varnothing$;

(6) 集合

$$\{x \in X \mid \overline{\mathrm{orb}(x)} = X\}$$

是 X 的一个处处稠密的 G_δ 型集.

拓扑传递性是动力系统的一个基本概念. 并不是每一个紧致系统都是拓扑传递的, 但每一个紧致系统一定有拓扑传递的子系统, 这是因为据命题 1.5.2 和命题 1.4.4, 对每一个 x, 子系统

$$f|_{\omega(x,f)} : \omega(x,f) \to \omega(x,f)$$

是拓扑传递的. 正如前面所说, 回复点集总是不空的, 这可以直接证明, 但这里不去证明它, 而把它当作后面一个命题的推论.

下面讨论另一个重要概念, 即拓扑混合性. 定义映射

$$\begin{cases} f \times f : X \times X \to X \times X, \\ (x_1, x_2) \mapsto (f(x_1), f(x_2)), \end{cases} \tag{1.5.1}$$

这里 $X \times X$ 表示 X 的拓扑积并赋以积拓扑. 易见, $f \times f \in C^0(X \times X)$.

定义 1.5.3 如果 $f \times f$ 是拓扑传递的, 则称 f 是拓扑弱混合的.

定义 1.5.4 如果对任意非空开集 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$, 存在 $N > 0$, 使得

$$f^n(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \varnothing, \quad \forall n \geqslant N,$$

则称 f 是拓扑强混合的.

据拓扑传递性的定义, f 是拓扑弱混合的, 相当于对 X 的任意非空开集 $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{Z}$, 存在 $n > 0$, 使得

$$(f \times f)^n((\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \cap (\mathcal{W} \times \mathcal{Z})) = (f^n(\mathcal{U}) \times f^n(\mathcal{V})) \cap (\mathcal{W} \times \mathcal{Z}) \neq \varnothing,$$

即

$$f^n(\mathcal{U}) \cap \mathcal{W} \neq \varnothing, \quad f^n(\mathcal{V}) \cap \mathcal{Z} \neq \varnothing.$$

从这里可以看出:

$$\text{拓扑强混合性} \Rightarrow \text{拓扑弱混合性} \Rightarrow \text{拓扑传递性}.$$

但一般而言, 反过来是不成立的. 与拓扑传递性不同, 给定的紧致系统不但可以不是拓扑混合的, 也可以没有拓扑混合的子系统. 最简单的例子是, 无理角度旋转的圆周自映射, 它本身是拓扑传递的, 但它不是拓扑弱混合的, 它也没有拓扑弱混合的子系统.

在一个紧致系统 (X, f) 中, f 可以看作是底空间 X 上的一个连续作用, 每一个点 $x \in X$, 在 f 的作用下变成像点 $f(x)$. $f(x)$ 仍然是 X 中的点, 可以对它继续作用, 变成像点 $f^2(x)$. 这个过程无限进行下去, 就在 X 上引起了一个运动. 不同的作用引起不同的运动, 有的可能复杂些剧烈些, 有的可能简单些平缓些. 在某种意义下给这种运动的复杂性或混乱程度一个描述是十分重要和基本的, 它将导致同一底空间上的系统的分类. 不同的分类相互比较是动力系统研究的一种重要方法. 本节引进的三个概念, 特别是拓扑混合性可以用来对系统进行分类.

1.6 几乎周期点与极小集

设 (X, f) 为紧致系统.

定义 1.6.1 如果 $\overline{\mathrm{orb}(x)} = X, \forall x \in X$, 即 X 中每一点的轨道都在 X 中稠密, 则称 f 是极小映射或 X 是极小集.

这是一个比拓扑传递性更强的概念.

如果子系统

$$f|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$$

是极小的, 则称 X 的对 f 不变的紧致子集 Λ 是极小的.

下面两个命题说明紧致系统的极小集总是存在的, 而极小系统则是在拓扑意义下不可分解的, 其证明参见文献 [50],[57].

命题 1.6.2 紧致系统 (X, f) 总是存在极小集.

推论 1.6.3 $R(f) \neq \varnothing$.

命题 1.6.4 下述条件等价:

1) f 是极小的;

2) 若 $\Lambda \subset X$ 紧且对 f 不变, 则 $\Lambda = X$ 或 $\Lambda = \varnothing$.

命题 1.6.4 的一个明显推论是极小系统不能有非平凡的子系统, 特别地, 若底空间是无限集合, 则极小系统不能有周期点.

一个非平凡的极小系统的例子是绕圆心无理角度旋转的圆周自映射. 读者不难给出证明.

下面引进几乎周期点的概念.

定义 1.6.5 $x \in X$ 叫做 f 的一个几乎周期点, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在整数 $N > 0$ 使得对任意整数 $q > 0$, 存在整数 r 满足 $q < r \leqslant N + q$ 且

$$f^r(x) \in V(x, \varepsilon).$$

f 的全体几乎周期点的集合记作 $A(f)$. 从定义易于看出

$$P(f) \subset A(f) \subset R(f),$$

且这两个包含关系都可以是真包含. 另外, 亦有 $f(A(f)) \subset A(f)$.

下面命题把几乎周期点与极小性联系在一起.

命题 1.6.6 设 $x \in X$. 则 $x \in A(f) \Leftrightarrow x \in \omega(x, f)$ 且 $\omega(x, f)$ 是极小的.

这个命题重要但证明并不简单, 请读者参见文献 [57] 等.

1.7 拓扑共轭与半共轭

设 (X, f) 和 (Y, g) 都是紧致系统.

定义 1.7.1 如果存在同胚映射 $h : X \to Y$ 使得

$$hf = gh,$$

即下面的图表可以交换, 则称 f 和 g 是拓扑共轭的, 记作 $f \simeq g$. 这时, 称 h 是从 f 到 g 的拓扑共轭.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{f} & \mathbb{X} \\ h\downarrow & & h\downarrow \\ \mathbb{Y} & \xrightarrow{g} & \mathbb{Y} \end{array}$$

容易看出, 当 h 是从 f 到 g 的拓扑共轭时, 则 h 亦是从 f^n 到 g^n 的拓扑共轭, 即 $f^n \simeq g^n, \forall n > 0$, 而且 h^{-1} 是从 g 到 f 的拓扑共轭, 即 $h^{-1}g = fh^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{f^n} & \mathbb{X} \\ h\downarrow & & h\downarrow \\ \mathbb{Y} & \xrightarrow{g^n} & \mathbb{Y} \end{array}$$

易见, 两个系统拓扑共轭的必要条件是它们的底空间同胚. 因此, 不失普遍性, 可以只考虑同一底空间上的系统的拓扑共轭问题, 如下面图表所示, 其中 h 为 X 上的自同胚.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{f} & \mathbb{X} \\ h\downarrow & & h\downarrow \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{g} & \mathbb{X} \end{array}$$

在 $C^0(X)$ 上建立关系 $\sim$: $f \sim g \Leftrightarrow f$ 与 g 拓扑共轭. 可以证明 $\sim$ 是 $C^0(X)$ 上的一个等价关系, 即它满足反身性、对称性和传递性. 因此 $\sim$ 把 $C^0(X)$ 分成等价类: 彼此拓扑共轭的在同一类, 不同类的映射不是拓扑共轭的.

命题 1.7.2 *设 $f \sim g, h$ 是从 f 到 g 的拓扑共轭. 又设 $x \in X$ 且存在递增序列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使得*

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = x_0 \in X,$$

则

$$\lim_{i\to\infty} g^{n_i}(h(x)) = h(x_0) \in X.$$

推论 1.7.3 *假设同上命题. 则*

(i) $h(F(f)) = F(g)$;

(ii) $h(P(f)) = P(g)$;

(iii) $h(A(f)) = A(g)$;

(iv) $h(R(f)) = R(g)$;

(v) $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$.

从定义出发直接证明, 从略.

上述命题说明拓扑共轭的系统在作为映射拓扑共轭的作用下保持轨道的结构不变, 因此, 拓扑共轭的系统有相同的轨道结构, 它们可以看成同一系统. 这导致紧

致系统的共轭分类. 寻求两个系统拓扑共轭的条件是一个重要而又困难的问题, 即使在一维动力系统中, 这方面的一般结果也是微乎其微的.

定义 1.7.4 如果定义 1.7.1 中的 $h: X \to Y$ 仅仅是在上连续的, 则称 f 与 g 是拓扑半共轭的, f 叫做 g 的扩充, g 叫做 f 的因子, h 叫做从 f 到 g 的拓扑半共轭.

如上所述, 拓扑共轭的两个紧致系统有完全相同的动力性状, 但拓扑半共轭的两个紧致系统, 其动力性状却可以大相径庭. 在拓扑半共轭下, 扩充 (因子) 的哪些动力性状得以在因子 (扩充) 中被保持是一个重要问题, 而且这个问题的探讨使得拓扑半共轭成为利用已知系统研究未知系统的一个有力工具.

命题 1.7.5 设 h 是从 f 到 g 的拓扑半共轭. 若 f 是拓扑传递的 (拓扑弱混合的, 拓扑强混合的), 则 g 亦然.

很容易从定义出发直接证明, 从略.

在拓扑半共轭的应用中, 更多的是利用已知的因子来研究未知的扩充, 因此哪些因子的性质通过拓扑半共轭得以在扩充中保持是一个重要问题. 但容易看出, 拓扑半共轭是一个弹性很大的概念, 例如, 任何一个系统都与同一底空间上的常值映射拓扑半共轭, 这当然毫无意义. 这说明拓扑半共轭的系统动力性状可以相去很远, 给研究带来极大不便. 我们引进的下述概念可以使我们在扩充中找到一个子系统, 它与因子在性质上更相近[100].

定义 1.7.6 设 $h: X \to Y$ 是从 f 到 g 的拓扑半共轭. 子集合 $X_h \subset X$ 叫做 Y 的一个 h 极小覆盖, 如果

(i) $\overline{X_h} = X_h$, 即 X_h 是闭子集;

(ii) X_h 对 f 不变;

(iii) $h(X_h) = Y$;

(iv) X_h 无真子集满足上述三个条件.

设闭子集 $Y_0 \subset Y$ 对 g 不变. 易见, $h^{-1}(Y_0) \subset X$ 亦对 f 不变. 进而, 易于验证

$$h|_{h^{-1}(Y_0)} : h^{-1}(Y_0) \to Y_0$$

是从 $f|_{h^{-1}(Y_0)}$ 到 $g|_{Y_0}$ 的拓扑半共轭. Y_0 的 h 极小覆盖是指 Y_0 的 $h|_{h^{-1}(Y_0)}$ 极小覆盖.

命题 1.7.7 设 $h: X \to Y$ 是从 f 到 g 的一个拓扑半共轭, 则存在 Y 的 h 极小覆盖. 进而, 若 g 是拓扑传递的, 则子系统 $f|_{X_0}$ 亦然.

推论 1.7.8 假设同上命题, 则

(i) $h(A(f)) = A(g)$;

(ii) $h(R(f)) = R(g)$,

即在拓扑半共轭下, 回复点和几乎周期点都得到保持.

从定义出发容易证明, 从略 (参见文献 [98]).

1.8 拓扑熵与混沌

1.8.1 拓扑熵

拓扑熵是到目前为止发现的唯一的紧致系统的拓扑共轭非负数值不变量. 它将是贯穿本书始终的重要概念之一. 本节介绍由 Adler 等给出的最初的开覆盖定义[1] 和后来由 Bowen 引进的扩张集与生成集定义[14], 然后介绍它的若干重要性质, 所有命题都不加证明, 读者可参考有关文献, 例如文献 [50], [57] 等.

设 (X, f) 为紧致系统. 用 α, β 等表示 X 的开覆盖. 下面先引进一些符号和术语, 并列出一些简单事实.

记

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B | A \in \alpha, B \in \beta\},$$

$$f^{-1}(\alpha) = \{f^{-1}(A), A \in \alpha\}.$$

它们也是 X 的开覆盖, 且有

$$f^{-1}(\alpha \vee \beta) = f^{-1}(\alpha) \vee f^{-1}(\beta).$$

又记

$$\vee_{i=0}^{n-1} f^{-1}(\alpha) = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\alpha), \quad \forall n > 0.$$

记 $N(\alpha)$ 为 α 的子覆盖的基数的下界. 据 X 的紧致性, 它是一个正整数. 又记

$$H(\alpha) = \log N(\alpha).$$

命题 1.8.1 *存在极限*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-1}(\alpha)).$$

定义 1.8.2 $\operatorname{ent}(f) = \sup\limits_{\alpha} \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-1}(\alpha)).$

这里 sup 是对 X 的所有开覆盖取上确界. 这就是拓扑熵的开覆盖定义. 这个定义只要求 X 是紧致的而无需可度量性.

下面给出拓扑熵的 Bowen 的定义. 原定义要求 X 是无需紧致性的可度量空间, 但其作用 f 是一致连续的. 为了简单, 我们只讨论 X 是紧致可度量的情形.

设 (X, f) 是紧致系统, d 是 X 的一个拓扑度量. 下面的定义与 X 的拓扑度量选取无关. 设 $n > 0$ 和 $\varepsilon > 0$. 子集合 $F \subset X$ 叫做 f 的一个 (n, ε) 张成集, 如果对每一个 $x \in X$, 存在 $y \in F$, 使得

$$d(f^i(x), f^i(y)) \leqslant \varepsilon, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

子集合 $E \subset X$ 叫做 f 的一个 (n, ε) 分离集, 如果对 $x, y \in E, x \neq y$ 蕴涵存在 $0 \leqslant i < n$, 使得

$$d(f^i(x), f^i(y)) > \varepsilon.$$

用 $r_n(\varepsilon, X, f)$ 表示 f 的 (n, ε) 张成集的基数的下确界; 用 $s_n(\varepsilon, X, f)$ 表示 f 的 (n, ε) 分离集的基数的上确界. 据 X 的紧致性, 易证下述诸结论:

(1) $r_n(\varepsilon, X, f) < \infty$, $s_n(\varepsilon, X, f) < \infty$;

(2) $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow r_n(\varepsilon_1, X, f) \geqslant r_n(\varepsilon_2, X, f)$, $s_n(\varepsilon_1, X, f) \geqslant s_n(\varepsilon_2, X, f)$;

(3) $r_n(\varepsilon, X, f) \leqslant s_n(\varepsilon, X, f) \leqslant r_n\left(\dfrac{\varepsilon}{2}, X, f\right)$.

记

$$r(\varepsilon, X, f) = \lim_{n \to \infty} \sup \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon, X, f),$$

$$s(\varepsilon, X, f) = \lim_{n \to \infty} \sup \frac{1}{n} \log s_n(\varepsilon, X, f).$$

据 (2) 和 (3), 有

$$r(\varepsilon, X, f) \leqslant s(\varepsilon, X, f) \leqslant r\left(\frac{\varepsilon}{2}, X, f\right).$$

定义 1.8.3

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} r(\varepsilon, X, f) = \lim_{\varepsilon \to 0} s(\varepsilon, X, f)$$

叫做 Bowen 意义下的拓扑熵.

有下述重要定理.

定理 1.8.4 设 (X, f) 为紧致系统, 则

$$\mathrm{ent}(f) = h(f).$$

即两种意义下的拓扑熵是一致的 (参见文献 [50],[57]). 无论从哪个定义出发, 拓扑熵这个概念都过于复杂, 以致人们很难掌握它的几何意义, 更无从由定义出发直接计算它的值. 这自然给拓扑熵的估计与计算带来极大不便. 下面是拓扑熵的一些基本性质, 它们将是我们研究拓扑熵的出发点.

设 (X, f) 和 (Y, g) 是两个紧致系统.

(a) $\mathrm{ent}(id) = 0$, 即恒同映射有零拓扑熵;

(b) $\mathrm{ent}(f^m) = m \cdot \mathrm{ent}(f)$, $m > 0$;

(c) 设 $\Lambda \subset X$ 是 X 的对 f 不变的闭子集, 则

$$\mathrm{ent}(f) \geqslant \mathrm{ent}(f|_\Lambda);$$

(d) $\mathrm{ent}(f) = \mathrm{ent}(f|_{\Omega(f)})$;

(e) 若 $f \sim g$, 则 $\mathrm{ent}(f) = \mathrm{ent}(g)$; 若 f 与 g 拓扑半共轭, 则 $\mathrm{ent}(f) \geqslant \mathrm{ent}(g)$; 拓扑熵是拓扑共轭不变量.

以上诸性质的证明以及拓扑熵的进一步的性质, 参见文献 [50],[57] 等, 其中 (d) 的一个简单证明见文献 [53].

1.8.2 混沌

混沌 (chaos) 的思想可以追溯到 Poincaré, 他在关于常微分方程定性理论的研究中发现的同宿轨已经蕴涵了混沌的萌芽.

而在著名的 Smale 马蹄中混沌已呼之欲出. 最先在文献中使用混沌一词的是李天岩和 Yorke, 他们在其著名的《周期 3 蕴涵混沌》[34] 一文中, 对线段动力系统证明了一个重要结果 (见第 2 章). 正是这个结果为离散系统的混沌提供了一个混沌定义的蓝本. 与此同时, 在包括物理、力学、天文、化学乃至生物等学科在内的几乎所有自然学科甚至人文学科也各自发现了一类深刻而又复杂的现象, 它们被统称为 "混沌现象". 数学上的混沌正是这类 "混沌现象" 的数学模型. 在数学上, 有很多混沌的定义, 本书只讨论 Li-Yorke 意义下的混沌, 因此我们只介绍 Li-Yorke 混沌. 本书凡提及混沌均指 Li-Yorke 混沌.

设 (X, f) 为紧致系统, d 是 X 上的一个拓扑度量. $x, y \in X$ 叫做 f 的混沌点偶, 如果

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0$;

(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$.

至少包含两点的子集合 $S \subset X$ 称作 f 的混沌集, 如果 S 中任意不同两点都是 f 的混沌点偶. 显然, 对任意的 $n > 0$, f^n 的混沌集亦是 f 的混沌集.

定义 1.8.5 设 $X_0 \subset X$ 是非空子集. 称 f 在 X_0 上混沌, 如果存在 f 的不可数的混沌子集 $S \subset X_0$. 如果 f 在 X 上混沌, 则简称 f 混沌.

定理 1.8.6 设 (X, f) 为紧致系统, 则 f 的任何混沌集中至多包含一个的渐近周期点.

证明参见文献 [58].

这个结果说明在讨论混沌集时, 可假设其中不含渐近周期点, 因为如果它包含一个, 把它去掉就是了, 对讨论无任何影响.

拓扑熵和混沌是拓扑动力系统最重要的两个概念, 对它们的讨论将贯穿本书的始终.

第2章　一维动力系统

本章讨论一维动力系统, 即线段动力系统和圆周动力系统. 线段动力系统是最简单的非平凡动力系统, 是唯一可以在相空间画出图像的系统, 这给我们的研究带来极大方便. 它是目前被研究得最充分因而成果也最丰富的动力系统. 圆周动力系统与线段动力系统既有紧密联系也有重要不同, 比较起来后者更基本一些, 它们合称一维动力系统. 在线段动力系统的发展中, 有三个定理起重要作用, 即 Sharkovskii 定理、Bowen-Franks 定理和 Li-Yorke 定理. 伴随每一个定理的出现, 都产生了一系列新问题需要解决, 正是这些新问题刺激了线段动力系统的发展. 下面我们从介绍这三个定理开始, 然后引进一个重要的工具性概念——非稳定流形, 讨论它们的性质, 最后证明三个基本结果. 在讨论线段动力系统之后, 讨论圆周动力系统.

2.1　线段动力系统

2.1.1　三个重要定理

1. Sharkovskii 定理

把全体正整数按下述方式排成一个无穷矩阵：第一行是全体奇数按递增顺序由左向右排列, 以下每一行的元素都是上一行对应元素乘以 2. 这样得到一个无穷矩阵. 在这个无穷方阵下面加上一行, 其元素是 2 的方幂按递减顺序由左向右排列直到 $2^0=1$. 为方便起见, 称这个无穷矩阵为 S 方阵:

$$S=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & \cdots & 2k+1 & \cdots \\ 2\times 3 & 2\times 5 & 2\times 7 & \cdots & 2(2k+1) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 2^n\times 3 & 2^n\times 5 & 2^n\times 7 & \cdots & 2^n(2k+1) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 2^n & 2^{n-1} & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

给全体正整数以新序, 称作 Sharkovskii 新序如下.

定义 2.1.1　*对任意不同两个正整数 m 和 n, 称 m 在 n 的前面或 n 在 m 的后面, 并记以 $m\lhd n$, 如果在 S 方阵中,*

(1) 在同一行时, m 在 n 的左边;

(2) 在不同行时, m 所在行在 n 所在行的上面.

下面的著名定理由 Sharkovskii 在 1964 年证明[46].

定理 2.1.2 设 $f \in C^0(I)$. 任给 m 和 n, 则 $m \in p(f)$ 且 $m \lhd n \Rightarrow n \in p(f)$.

这个定理在 1964 年用俄文发表, 被束之高阁长达 13 年之久, 直到 1977 年才由 Stefan[47] 纠正原文若干不妥之处并补充某些新结果后用英文重新发表出来. 鉴于这个定理的重要性, 它的证明已有七八个之多, 这里我们不去证明它, 有兴趣的读者可参阅有关文献. 这个定理的重要性是不言而喻的, 它揭示了这类映射的一个奇妙、深刻但并不深奥的性质. 这个定理是线段动力系统理论发展的第一剂酵母, 起着重要作用. 它引申出一系列问题需要回答, 这些问题与第 1 章中所定义的那些特征集合以及下面将要叙述的另外两个重要定理都有着深刻的内在联系. 下面是它的一些简单推论和已知结果.

(1) f 有周期 3, 则 f 有所有正整数的周期. 这个结果在 1975 年由李天岩和 Yorke[34] 在不知道这个定理的情况下用不同方法重新证明.

(2) $p(f)$ 有限, 则存在 $n > 0$, 使 $p(f) = \{2^n, 2^{n-1}, \cdots, 2^0 = 1\}$.

(3) $p(f)$ 无限, 则有两种情形, 其一是 $p(f)$ 包含一个非 2 方幂数, 另一种情形是 $p(f) = \{2^n | \forall n \geqslant 0\}$.

(4) Stefan[47] 证明, 对任意整数 $n > 0$, 存在 $f \in C^0(I)$, 使得 $n \in p(f)$, 但任意 $m \lhd n, m \notin p(f)$. 特别地, 存在 $f \in C^0(I)$, 使得 $p(f) = \{2^n | \forall n \geqslant 0\}$.

按 Sharkovskii 定理, $f \in C^0(I)$ 可以被分成两类: 有非 2 方幂周期的归作一类, 余者归作另一类. 以后将会看到, 同一类的映射性质相近, 而不同类映射则在动力性状上有重大不同. 本书处理线段动力系统的一个指导思想是, 从处理较简单的第二类映射入手, 寻求用以刻画这类映射的其他重要概念的特征, 特别是等价条件.

2. Bowen-Franks 定理

定理 2.1.3[16] 设 $f \in C^0(I)$. 若 $n = 2^m \times d \in p(f)$, 其中 d 为奇数, 则

$$\mathrm{ent}(f) > \frac{1}{n}\log 2 > 0.$$

这个定理把拓扑熵与 Sharkovskii 定理联系起来, 最先证明正拓扑熵线段自映射的存在性, 开了估计拓扑熵下限的先河. 另外 Block 曾猜测这个定理的逆定理亦成立, 即有非 2 方幂周期是线段自映射有正拓扑熵的充要条件, 廖山涛把它称作小熵猜测 (以区别 Shub 提出的拓扑熵猜测). 下面是它的一个等价形式.

小熵猜测: 设 $f \in C^0(I)$. 则

$$\mathrm{ent}(f) = 0 \Leftrightarrow p(f) \subset \{2^n | \forall n \geqslant 0\}.$$

1979 年 Misiurewicz[40] 和 1980 年 Blokh[13] 先后宣布他们肯定地回答了这个猜测, 前者在 1980 年发表了证明全文, 而后者的证明至今也未见发表. 本书作者给出它的一个不同于前者的独立证明. 此证明将在后面给出.

Bowen-Franks 定理后来由 Block[8] 和 Misiurewicz[41] 分别用符号动力系统和遍历理论方法给出新证明. 再者, 满足定理 2.1.3 条件的 f 的拓扑熵的最好下限已经求得, 即

$$\mathrm{ent}(f) \geqslant \frac{1}{2^m} \log \lambda_d,$$

其中 λ_d 是多项式 $x^d - 2x^{d-1} - 1$ 的最大实根.

3. Li-Yorke 定理

定理 2.1.4[34] *设 $f \in C^0(I)$. 若存在 $a \in I$, 使得*

$$f^3(a) \leqslant a < f(a) < f^2(a),$$

或

$$f^3(a) \geqslant a > f(a) > f^2(a),$$

则

(1) *f 有所有正整数周期;*

(2) *存在不可数集合 $S \subset I$, 满足:*

(a) $\liminf\limits_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0, \forall x, y \in S;$

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0, \forall x, y \in S, x \neq y;$

(c) $\limsup\limits_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(p)| > 0, \forall x \in S, p \in P(f).$

这个定理的证明见文献 [34],[57] 等. 我们曾证明, 这个定理中的混沌集 S 可选择全由非游荡点组成[58]. 这就是第 1 章中所说的为离散系统提供一种混沌定义: Li-Yorke 意义下混沌定义蓝本的 Li-Yorke 定理. 应该加以说明的是, 我们在混沌的定义中放弃了定理 2.1.4 中的 (1), 即不对周期有任何要求, 因为不然的话, 将会把一大批复杂系统, 例如有正拓扑熵的极小系统 (这样的系统是存在的, 见文献 [50]) 排除在混沌系统之外. 这显然是不适当的. 另外, 我们也放弃了 (2) 中的 (c). 事实上, (2) 中的 (a) 和 (b) 蕴涵混沌集中至多包含一个周期点, 必要时去掉它就是了.

2.1.2 非稳定流形

讨论线段自映射的非游荡集结构始于 Block 的最初几篇文章[6]-[9]. 他提出一些重要概念, 得到一些初步结果, 给深入讨论打下基础. 非稳定流形是微分动力系统西方流派的重要概念之一, 由他引进到线段自映射中来. 这是一个工具性概念,

在某种意义下可以弥补由于没有可微性假设而带来的困难. 我们从介绍非稳定流形这个概念开始.

本节下面恒设 $f \in C^0(I)$. 设 $p \in P(f)$. 总是记

$$V(p) = (t, s), \quad V_+(p) = [p, s), \quad V_-(p) = (t, p]$$

分别是 p 的 (开) 邻域、右和左半邻域, 其中 $0 \leqslant t < p < s \leqslant 1$.

定义 2.1.5 设 $p \in P(f)$. 记

$$W^u(p, f) = \bigcap_{V(p)} \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(V(p)),$$

$$W^u(p, f, \pm) = \bigcap_{V_\pm(p)} \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(V_\pm(p)),$$

分别称之为 p 点的双边、右边和左边非稳定流形.

容易证明, 若 $x \in I$, 则 $x \in W^u(p, f)$ 当且仅当对任意的 $V(p)$, 存在 $n > 0$, 使得 $x \in f^n(V(p))$. 对另外两种有类似的情形. 这是 Block 引进非稳定流形时的最初定义. 下面这两种定义将同时使用. 从这个定义易见

$$W^u(p, f) = W^u(p, f, +) \cup W^u(p, f, -).$$

不动点的非稳定流形的几何意义是非常明显的: f 是局部扩张或收缩或一边收缩一边扩张的, 可以从非稳定流形的结构一目了然, 并且在扩张的时候, 还能显示这个不动点的邻近点经迭代能否落回这个不动点上. 这种情形的不同反映了映射动力性状的不同. 例如, 有无非 2 方幂周期就可以由非稳定流形完全刻画. 一句话, 下面的讨论说明, 线段自映射的基本性质可以从非稳定流形的结构中反映出来. 下面先证明非稳定流形的一些基本性质.

引理 2.1.6 设 $p \in F(f)$, 则 $W^u(p, f)$ 和 $W^u(p, f, \pm)$ 都是包含 p 点的连通集合, 且

$$f(W^u(p, f)) = W^u(p, f), \quad f(W^u(p, f, \pm)) = W^u(p, f, \pm).$$

证明 从定义容易看出, 不动点属于自己的非稳定流形.

设 $p < y < x$ 且 $x \in W^u(p, f)$. 据非稳定流形的定义, 容易看出, 对任意 $V(p)$, 若 $x \in W^u(p, f)$, 则 $y \in W^u(p, f)$. 当 $x < y < p$ 时有类似结果. 这证明了双边非稳定流形是连通的.

单边情形证明类似.

下设 $x \in W^u(p, f)$, 即对任意 $V(p)$, 存在 $m > 0$, 使得 $x \in f^m(V(p))$. 显然 $f(x) \in f^{m+1}(V(p))$. 这证明 $f(W^u(p, f)) \subset W^u(p, f)$. 因此 $W^u(p, f)$ 对 f 不变.

下设 $x \in W^u(p,f)$. 我们证明存在 $y \in W^u(p,f)$, 使得 $f(y)=x$, 即证明 $f(W^u(p,f)) \supset W^u(p,f)$. 若 $W^u(p,f)=\{p\}$, 则结论显然成立. 下设它不是单点集, 且 $x \neq p$. 我们断言存在 $y \in I$, 使得 $f(y)=x$. 这是因为, 对任意 $V(p)$ (可设 $x \notin V(p)$), 据定义存在 $m>0$, 使得 $x \in f^m(V(p))$ 但 $x \notin f^{m-1}(V(p))$. 显然存在 $y \in f^{m-1}(V(p))$, 使得 $f(y)=x$. 断言获证.

下面用反证法, 即假设不存在 $y \in f^m(V(p))$, 使得 $f(y)=x$. 易见, 存在最大闭区间 $[z,w]$, 使得 $y \in (z,w) \Rightarrow f(w) \neq x$. 显然 $f(z)=x, f(w)=x$ 至少一个成立. 不妨设它们都成立. 据假设 $z,w \notin W^u(p,f)$. 据定义, 存在 $V(p)$, 使得 $z,w \notin f^k(V(p)), \forall k>0$. 又据定义, 对这个 $V(p)$, 存在 $m>0$, 使得 $x \in f^m(V(p))$, 但是 $x \notin f^{m-1}(V(p))$. 于是存在 $y \in f^{m-1}(V(p))$, 使得 $f(y)=x$. 据前面假设 $y<z$, 或 $y>w$. 但显然 $y \in f^{m-1}(V(p)) \Rightarrow z \in f^{m-1}(V(p))$ 或者 $y \in f^{m-1}(V(p)) \Rightarrow w \in f^{m-1}(V(p))$. 这与前面矛盾. $f(W^u(p,f)) \supset W^u(p,f))$ 得证.

以上证明了 $f(W^u(p,f)) = W^u(p,f)$. 同样可以证明, $f(W^u(p,f,\pm)) = W^u(p,f,\pm)$. □

引理 2.1.7 设

$$\{p, f(p), \cdots, f^{n-1}(p)\}$$

是 f 的一个 n 周期轨道 $(n>0)$. 则

(1) $W^u(p,f) = \bigcup\limits_{i=0}^{n-1} W^u(f^i(p), f^n)$;

(2) $f^i(W^u(p,f^n)) = W^u(f^i(p), f^n), i=1,2,\cdots,n-1$.

证明 设 $x \in W^u(p,f)$. 任给 $V(p)$, 据定义, 存在 $m>0$, 使得 $x \in f^m(V(p))$. 记 $m=kn+r$, 其中正整数 $k \geqslant 0, 0 \leqslant r < n$. 由 $x \in f^m(V(p)) = f^{kn}(f^r(V(p)))$, 按定义 $x \in W^u(f^r(p), f^n)$.

现设对某个 $0 \leqslant r < n$, $x \in W^u(f^r(p), f^n)$. 对任意的 $V(p)$, 存在 $V(f^r(p))$, 使得 $f^{n-r}(V(f^r(p))) \subset V(p)$. 据定义, 存在充分大的 $m>0$, 使得

$$x \in f^m(V(f^r(p))) = f^{m-(n-r)} f^{n-r}(V(f^r(p))) \subset f^{m-(n-r)}(V(p)).$$

这证明 $x \in W^u(p,f)$.

下面只证明 $f(W^u(p,f^n)) = W^u(f(p), f^n)$, 其余情况可归纳证明.

设 $x \in f(W^u(p,f^n))$, 即存在 $y \in W^u(p,f^n)$, 使得 $x=f(y)$. 据连续性, 对任意 $V(f(p))$, 存在 $V(p)$, 使得 $f(V(p)) \subset V(f(p))$. 据定义, 存在 $m>0$, 使得 $y \in f^{mn}(V(p))$. 于是

$$x = f(y) \in f(f^{mn}(V(p))) = f^{mn}(f(V(p))) \subset f^{mn}(V(f(p))).$$

这证明 $f(W^u(p,f^n))\subset W^u(f(p),f^n)$. 易见, 归纳地, 有

$$f^i(W^u(p,f^n))\subset W^u(f^i(p),f^n),\quad 0<i<n.$$

下面证明 $f(W^u(p,f^n))\supset W^u(f(p),f^n)$, 即若 $x\in W^u(f(p),f^n)$, 则存在 $y\in W^u(p,f^n)$, 使得 $f(y)=x$. 当 $f(W^u(p,f^n))$ 是单点集时, 结论显然成立. 下设它不是单点集, 且 $x\neq f(p)$. 用反证法, 设上述 y 不存在. 我们断言存在 $y\in I$, 使得 $f(y)=x$. 这是因为, 对任意 $V(f(p)), x\notin V(f(p))$, 存在 $m>0$, 使得 $x\in f^{mn}(V(p))$, 但 $x\notin f^{(m-1)n}(V(f(p)))$. 因此存在 $z\in f^{(m-1)n}(V(p))$, 使得 $f^n(z)=f(f^{n-1}(z))=x$. 断言得证.

记 $[z,w]\subset I$ 为包含 p 的最大闭区间, 使得 $y\in[z,w]\Rightarrow f(z)\neq x, f(w)\neq x$ 至少一个成立. 下面不妨假设它们都成立. 据反证法假设 $z,w\notin W^u(p,f^n)$. 据定义, 存在 $V(p)\subset[z,w]$, 使得

$$z,w\notin f^{kn}(V(p)),\quad \forall k\geqslant 0. \tag{2.1.1}$$

据连续性, 存在 $V(f(p)), x\neq f(p)$, 使得 $f^{n-1}(V(f(p)))\subset V(p)$. 因 $x\in W^u(f(p),f^n)$, 据定义, 存在 $m>0$, 使得 $x\in f^{mn}(V(f(p)))$, 但 $x\notin f^{(m-1)n}(Vf(p))$. 于是存在 $y\in f^{(m-1)n}(V(f(p)))$, 使得

$$f^n(y)=f(f^{n-1}(y))=x.$$

据 (2.1.1),

$$\begin{aligned}f^{n-1}(y)\in f^{n-1}f^{(m-1)n}(V(f(p)))&\subset f^{(m-1)n}(f^{n-1}(V(f(p)))\\ &\subset f^{(m-1)n}(V(p))\subset(z,w),\end{aligned}$$

这与闭区间 $[z,w]$ 的取法矛盾. 这完成 $f(W^u(p,f^n))\supset W^u(f(p),f^n)$ 的证明. □

推论 2.1.8 $f(W^u(p,f))=W^u(p,f),\forall p\in P(f)$.

证明 设 p 为 f 的 n 周期点. 据引理 2.1.7, 注意到 $f^n(p)=p$, 有

$$\begin{aligned}f(W^u(p,f))&=f\left(\bigcup_{i=0}^{n-1}W^u(f^i(p),f^n)\right)=\bigcup_{i=0}^{n-1}f(W^u(f^i(p),f^n))\\ &=\bigcup_{i=0}^{n-1}W^u(f^{i+1}(p),f^n)=\bigcup_{i=0}^{n-1}W^u(f^i(p),f^n)=W^u(p,f).\end{aligned}$$ □

引理 2.1.9 $W^u(p,f^n)=W^u(p,f),\forall p\in F(f),\forall n>0$.

证明 设 $n>0$. 由定义可以直接验证 $W^u(p,f^n)\subset W^u(p,f)$.

下面证明相反方向的包含关系. 设 $x\in W^u(p,f)$. 据连续性, 对任意 p 的邻域 $V(p)$, 存在 p 的邻域 $U(p)$, 使得 $f^i(U(p))\subset V(p), i=1,2,\cdots,n-1$. 对这个 $U(p)$,

存在 $m = kn+r, k \geqslant 0, 0 \leqslant r < n$ 使得 $x \in f^m(U(p)) = f^{kn}(f^r(U(p))) \subset f^{kn}(V(p))$, 据定义 $x \in W^u(p, f^n)$. □

引理 2.1.10 $\overline{W^u(p,f)} - W^u(p,f) \subset P(f), \forall p \in P(f)$.

证明 先设 $p \in F(f)$. 据推论 2.1.8, $f(W^u(p,f)) = W^u(p,f)$. 显然亦有

$$f(\overline{W^u(p,f)}) = \overline{W^u(p,f)}.$$

设 $\overline{W^u(p,f)} = [x,y] \subset I$. 设 $x \notin W^u(p,f)$. 若亦有 $y \notin W^u(p,f)$, 则据上式, 只有两种情形: $f(x) = x, f(y) = y$ 或 $f(x) = y, f(y) = x$. 若 $y \in W^u(p,f)$, 则必有 $f(x) = x$. 这完成不动点情形的证明. 下设 p 是 f 的 n 周期点. 据引理 2.1.7 , 易见 $x \notin \overline{W^u(p,f)} - W^u(p,f)$ 蕴涵存在 $i, 0 \leqslant i < n$, 使得

$$x \notin \overline{W^u(f^i(p), f^n)} - W^u(f^i(p), f^n).$$

但 $f^n(p)$ 是 f^n 的不动点, 由前面的证明, 有 $x \in P(f)$. □

2.1.3 同宿点和单纯周期轨道

1. 同宿点

随着讨论的展开, 我们将陆续补充非稳定流形的性质. 下面先引进一个重要概念, 即同宿点 (异状点 (homochinic point)).

定义 2.1.11 *点 $x \in I$ 叫做 f 的同宿点, 如果*

(1) *存在 $p \in P(f), x \neq p$;*

(2) *$x \in W^u(p, f^n), n$ 为 p 的周期;*

(3) *存在 $m > 0$, 使得 $f^{mn}(x) = p$.*

易于验证, 同宿点是终于周期点, 不是周期点; 同宿点可能是非游荡点也可能不是, 但同宿点肯定不是回复点. 同宿点的重要意义可由下述定理看出.

定理 2.1.12 *下述条件等价:*

(1) *f 有非 2 方幂周期;*

(2) *f 有同宿点;*

(3) *存在 I 的两个不相交闭线段 J, K 以及整数 $n > 0$, 使得*

$$f^n(J) \cap f^n(K) \supset J \cup K.$$

条件 (3) 以后称之为马蹄效应.

推论 2.1.13 *条件 (3) 蕴涵 f 是混沌的.*

推论 2.1.13 的证明是文献 [34] 重要内容, 这里从略.

为了证明这个定理, 先证明几个引理.

引理 2.1.14 *f 有同宿点当且仅当存在 f 的 n 周期点 p 和点 $z \in W^u(p, f^n)$, 使得 $f^n(z) = p$.*

由定义可直接证明, 从略.

引理 2.1.15 *设 $0 \leqslant p < q \leqslant 1$, 其中 p, q 是 f 的不动点. 若 f 在 (p, q) 内无不动点, 则 $(p, q) \subset W^u(p, f, +)$ 或 $(p, q) \subset W^u(p, f, -)$.*

证明 据假设容易看出, f 在 (p, q) 内的图像或全在主对角线上面或全在下面. 据非稳定流形的定义容易看出, 若前者, 则 $(p, q) \subset W^u(p, f, +)$, 而若后者, 则 $(p, q) \subset W^u(p, f, -)$. □

引理 2.1.16 *设 f 有周期 3. 则存在 f^2 的不动点 p 和 $z \in W^u(p, f^2), z \neq p, f^2(z) = p$.*

证明 设 $0 \leqslant p_1 < p_2 < p_3 \leqslant 1$ 是 f 的一个 3 周期轨道. 不失普遍性, 可设

$$f(p_1) = p_2, \quad f(p_2) = p_3, \quad f(p_3) = p_1.$$

记 $g = f^2$. 易见

$$g([p_1, p_2]) \supset [p_1, p_2], \quad g([p_2, p_3]) \subset [p_2, p_3].$$

显然 g 在 $[p_1, p_2]$ 和 $[p_2, p_3]$ 上都有不动点. 记

$$x_0 = \sup\{x \in [p_1, p_2] | g(x) = x\},$$

$$y_0 = \inf\{x \in [p_2, p_3] | g(x) = x\}.$$

显然 x_0, y_0 是 g 的不动点, $p_1 \leqslant x_0 < p_2 \leqslant y_0 \leqslant p_3$ 且 g 在 (x_0, y_0) 内无不动点. 据引理 2.1.15, $p_2 \in W^u(x_0, g, +)$ 或 $p_2 \in W^u(y_0, g, -)$. 不妨设后者成立. 因为 $g(W^u(y_0, g)) = W^u(y_0, g)$, 易见

$$\{p_1, p_2, p_3\} \subset W^u(y_0, g)$$

和

$$[p_1, p_3] \subset W^u(y_0, g).$$

注意到 $g([p_1, p_2]) \supset [p_2, p_3]$, 存在 $z \in [p_1, p_2]$, 使得 $g(z) = y_0$. 因为 y_0 是 g 的不动点,

$$z \in W^u(y_0, g), \quad z \neq y_0$$

和

$$g(z) = y_0.$$

推论 2.1.17 *f 有非 2 方幂周期, 则 f 有同宿点.*

证明 据 Sharkovskii 定理, 存在整数 $r > 0, f^r$ 有周期 3. 令 $n = 2r$. 据引理 2.1.16, 存在 f^n 的不动点 p 和 $z \in W^u(p, f)$, $z \neq p$, 但 $f^n(z) = p$. z 是 f 的同宿点. □

引理 2.1.18 *设 p 是 f 的不动点. 又点 $y \neq p$, $y \in W^u(p, f)$. 则对任意 $V(p)$, 存在点 $z \in W^u(p, f) \cap V(p)$ 和 $r > 0$, 使得 $f^r(z) = y$.*

据非稳定流形定义可证明, 从略.

引理 2.1.19 *设 f 有同宿点. 则存在 I 的不相交闭子线段 J, K 以及 $n > 0$, 满足*

$$f^n(J) \cap f^n(K) \supset J \cup K.$$

证明 不失普遍性可设 $p \in F(f)$ 和同宿点 $y \in W^u_+(p, f)$, $y > p$, $f(y) = p$. 据定义, 存在 $V_+(p)$, $y \notin V_+(p)$, $m > 0$, $y \notin f^{m-1}(V_+(p))$, $y \in f^m(V_+(p))$. 任取 $q \in V_+(p)$, $q > p$, $f^{m-1}(q) < y$, $f^m(q) = y$. 取 $w > q$, $f^{m-1}(q) < w < y$. 令 $J = [p, q]$, $K = [w, y]$. 显然

$$f^{m+1}([q, p]) \supset J \cup K.$$

易见亦有

$$f^{m+1}([w, y]) \supset J \cup K,$$

即

$$f^{m+1}(J) \cap f^{m+1}(K) \supset J \cup K.$$

引理 2.1.20[34] *设 J, K 是 I 中两个不相交的闭线段, 满足 $f(J) \cap f(K) \supset J \cup K$, 则 f 有任意正整数的周期.*

定理 2.1.12 的证明 (1) ⇒ (2) 由推论 2.1.17 给出.

(2) ⇒ (3) 由引理 2.1.19 给出.

(3) ⇒ (1) 由引理 2.1.20 给出.

前面说过, 线段自映射可以按有没有非 2 方幂周期分类, 有非 2 方幂的归作一类, 没有的归作另一类. 同样可以把有同宿点的映射分作一类, 而把没有的归作另一类, 得到另一种分类. 定理 2.1.12 说明这两种分类是等价的. 一个线段自映射有没有非 2 方幂周期是一个完全不显然的问题, 但是我们将会看到, 它有没有同宿点却非常直观, 而且同宿点在某种意义上讲是一个易于操作的概念. 当我们用有否同宿点代替有否非 2 方幂周期时, 就实现了用一个直观的概念代替一个不易掌握的概念的过程, 它将使研究工作更容易进行. 下一节就专门研究无同宿点的线段自映射.

2. **单纯周期轨道** (simple periodic orbit)

设 $f \in C^0(I)$, 并设 P 是它的一个周期为 $2^n (n \geqslant 0)$ 的周期轨道.

P 可以用两种方式排列:

$$P = \{p, f(p), \cdots, f^{2^{n-1}}(p)\}$$

和

$$P = \{p_1 < p_2 < \cdots < p_{2^{n-1}}\}.$$

在第 1 种排列中易见

$$\{p, f^2(p), \cdots, f^{2^{n-2}}(p)\}$$

和

$$\{f(p), f^3(p), \cdots, f^{2^{n-1}}(p)\}$$

分别是 f^2 的两个 2^{n-1} 周期轨道. 当 $n-1>1$ 时, f^2 的这两个周期轨道又可以按同样方式分解成 f^4 的两个 2^{n-2} 周期轨道. 这个过程可以一直进行下去, 直到分解成 $f^{2^{n-2}}$ 的 2^{n-1} 个 2 周期轨道为止.

再看第 2 种排列. 记

$$P_1 = \{p_1 < p_2 < \cdots < p_{2^{n-1}}\}$$

和

$$P_2 = \{p_{2^{n-1}+1} < \cdots < p_{2^n}\},$$

即把 P 从中间分成前后两段. 易见, 如果 $f(P_1) = P_2$, 则 $f(P_2) = P_1$, 且 $f^2(P_i) = P_i, i = 1, 2$, 即 P_1, P_2 分别是 f^2 的两个 2^{n-1} 周期轨道. 如果这个条件得到满足, 就说 P 的这种分解是单纯的. 分解后得到的 f^2 的两个 2^{n-1} 周期轨道还可以进行分解, 是否为单纯分解按同样方式定义. 这种分解可以一直进行下去, 直到分解成 f^2 的 2^{n-1} 个 2 周期轨道为止, 每次分解是否是单纯的均按同样方式定义.

定义 2.1.21[9] *f 的 2^n 周期轨道 P 叫做单纯的, 如果在上述分解过程中每一步分解都是单纯的.*

轨道可以按大小排列是线段动力系统所独有的, 这种特性形成了线段动力系统独有的丰富研究内容, 它们与非游荡集结构、拓扑熵和混沌有着深刻的内在联系. 下述定理的证明参见文献 [9].

定理 2.1.22 *设 $f \in C^0(I)$. 下述条件等价:*

(1) f 有同宿点;

(2) f 有非单纯的 $2^n (n>1)$ 的周期轨道.

设 P 是 f 的一个周期轨道, 周期 $n > 1$. 记 $P_{\min}(f), P_{\max}(f)$ 分别为 P 中最小和最大的元素. 又记 $U(f) = \{x \in I | f(x) > x\}; D(f) = \{x \in I | f(x) < x\}$, 并记 $P_U(f)$, $P_D(f)$ 分别为 $P \cap U(f)$, $P \cap D(f)$ 的最大元素和最小元素. 下述两个定理的证明见文献 [47].

定理 2.1.23　*若 $P_{\min}(f)$ 和 $P_U(f)$ ($P_{\max}(f)$ 和 $P_D(f)$) 之间存在 f 的不动点, 则 f 有同宿点.*

定理 2.1.24　*$P_D(f) < P_U(f)$ 蕴涵 f 有同宿点.*

2.1.4　无同宿点的线段自映射

本节恒设 $f \in C^0(I)$ 无同宿点. 为了看清楚同宿点的几何意义, 引进下述记号: 设 $p \in F(f)$. 记

$$W_+^u(p,f) = W^u(p,f) \cap [p,1], \quad W_-^u(p,f) = W^u(p,f) \cap [0,p].$$

引理 2.1.25　*设 $p \in F(f)$. 则*

$$f(W_\pm^u(p,f)) = W_\pm^u(p,f)$$

或

$$f(W_\pm^u(p,f)) = W_\mp^u(p,f).$$

证明　用反证法, 若结论不成立, 则易证存在 $x \in W^u(p,f)$, $x \neq p$, $f(x) = p$. 据定义 x 是同宿点, 矛盾. □

这个引理说明, 无同宿点蕴涵把 f 限制在 $W^u(p,f)$ 上时, 它的图像只与直线 $y = p$ 相交于 (p,p) 一点, 因此 f 在 $W_+^u(p,f)(W_-^u(p,f))$ 上的图像只能全在直线 $y = p$ 的上面 (下面). 这就是引理 2.1.25 所表达的事实, 而这个简单的事实就是下面讨论的出发点.

推论 2.1.26

$$f(W_\pm^u(p,f)) = W_\pm^u(p,f) \Rightarrow W_\pm^u(p,f) = W^u(p,f,\pm)$$

和

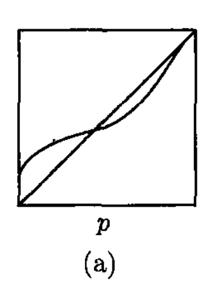
$$f(W_\pm^u(p,f)) = W_\mp^u(p,f) \Rightarrow W^u(p,f) = W^u(p,f,\pm).$$

证明是显然的.

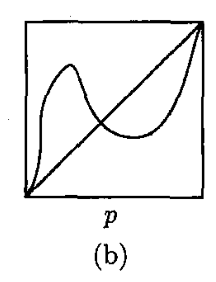
推论 2.1.27　*$f^2(W_\pm^u(p,f)) = W_\pm^u(p,f)$.*

如果画出 f 的相图, 这些性质一眼就可以看出, 例如图 2.1.1(a) 是无同宿点的线段自映射, 其中 $W^u(p,f,+)$ 中的图像全在 $y = p$ 直线的上面, 而 $W^u(p,f,-)$ 中的图像全在 $y = p$ 的下面. 图 2.1.1(b) 是有同宿点的线段自映射, 情形就较为复杂.

图 2.1.2 是所谓帐篷映射, 具有同宿点. 这些都是最简单的情形, 读者如能画出更多的情形将是有好处的. 总之, 同宿点是理解线段动力系统最基本、最直观的概念, 理解透彻这个概念至关重要.



(a)



(b)

图 2.1.1 无、有同宿点的线段自映射

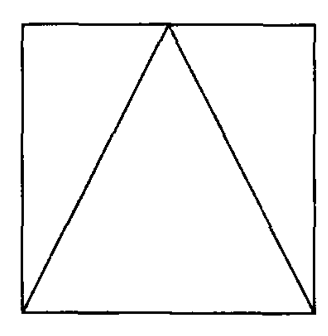


图 2.1.2 帐篷映射

2.1.5 几个重要定理

我们前面说过, 线段动力系统是最简单的动力系统, 那是说它的底空间是非平凡最简单的空间, 即一维有边连通流形, 其图像可以在平面上画出来, 这给研究带来极大方便, 但不是说线段动力系统本身简单, 它有非常丰富的特有性质, 为其他情形所没有. 最简单的例子是, 线段自映射一定有不动点, 但一般情形不具有这个性质. 下面以几个重要结果为纲带动比较全面的讨论. 我们将在 "非游荡集结构 - 拓扑熵估计 - 混沌存在的判定" 这样一个框架下进行讨论. 这也将是我们讨论一般动力系统的框架, 但随着讨论的深入, 将作适当修改. 本章选择讨论内容的原则是, 或者它们本身具有重要意义, 或者它们对以后讨论一般动力系统时有重要启迪作用. 哪些结果可以推广, 哪些不能推广是我们讨论一般动力系统的一个重要问题来源. 前面我们说过, 同宿点是理解线段自映射的关键, 我们将以引理或命题的形式全面讨论有关同宿点的性质, 所要证明的几个重要结果就蕴涵在这些引理之中. 读者将会看到, 线段动力系统并不简单.

下面恒设 $f \in C^0(I)$.

命题 2.1.28 *f 有同宿点当且仅当存在 $x \in \Omega(f) \cap EP(f) - P(f)$, 即存在不是周期点的非游荡的终于周期点.*

容易证明, 这样的 $x \in \Omega(f) \cap EP(f) - P(f)$ 一定是周期点集的闭包点, 即 $x \in \overline{P(f)}$. 所以这个命题的一个推论是, 有同宿点的线段自映射周期点集不是闭的.

为了证明这个命题, 先证明几个引理.

引理 2.1.29 *设 $p \in EP(f) \cap \Omega(f)$, 并记 $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ 为其进入 $\mathrm{orb}(p)$ 的周期轨道. 则 $p \in W^u(p_i, f), 1 \leqslant i \leqslant n$.*

证明 若 $p \in P(f)$ 显然. 下设 $p \notin P(f)$ 且 $p \neq p_i, i = 0, 1, \cdots, n$. 先证明 $p \in \overline{W^u(p_i, f)}, 1 \leqslant i \leqslant n$. 设不然, 于是存在 $a < b, 0 \leqslant a < p < b \leqslant 1$ (这里假设 p

不是 I 的边界点, 否则适当修改), 使 $p_i \notin [a,b], i=1,\cdots,n$ 且 $[a,b]\cap W^u(p_i,f)=\varnothing, 1\leqslant i\leqslant n$. 显然存在 $V(p_i)\subset W^u(p_i,f)$, 使 $f^m(V(p_i))\cap\{a,b\}=\varnothing, \forall m>0$. 因为 $f^m(V(p_i))$ 是连通的, 且对每一个 $m>0, f^m(V(p_i))$ 都至少包含 $\{p_i,\cdots,p_n\}$ 中一点, 故

$$f^m(V(p_i))\cap(a,b)=\varnothing,\quad \forall m>0.$$

设 j 是使 $f^j(p)=p_i$ 的最小整数. 取 $V(p)\subset(a,b)$, 使 $f^j(V(p))\subset V(p_i)$, 有

$$f^m(V(p))\cap V(p)\subset f^{m-j}(V(p_i))\cap(a,b)=\varnothing,\quad \forall m>1.$$

这显然与 $p\in\Omega(f)$ 矛盾. 这证明了 $p\in\overline{W^u(p_i,f)}$.

再证明 $p\in W^u(p_i,f)$. 设不然, 即 $p\in\overline{W^u(p_i,f)}-W^u(p_i,f)$. 据引理 2.1.10, 有 $p\in P(f)$, 与假设矛盾. □

引理 2.1.30　*设 $p\in F(f)$. 若存在某一个 $V_-(p)$ $(V_+(p))$, 使*

$$f(x)\geqslant x,\quad \forall x\in V_-(p)\quad (f(x)\leqslant x, \forall x\in V_+(p)),$$

则

$$W^u(p,f,-)\subset W^u(p,f,+)\quad (W^u(p,f,+)\subset W^u(p,f,-)).$$

证明　假设 $V_-(p)$ 如上. 若存在 $U_-(p)\subset V_-(p)$, 使 $p\geqslant f(x)\geqslant x, \forall x\in U_-(p)$, 则由定义易证 $\{p\}=W^u(p,f,-)\subset W^u(p,f,+)$. 引理得证. 下设对任意 $U_-(p)$, 都存在 $x\in U_-(p)$, 使 $f(x)>p$. 易见这时有 $f(U_-(p))\cap[p,1]\neq\{p\}, f(U_-(p))\cap[0,p]\subset U_-(p)$, 且对任意 $V_+(p)$, 由 f 的连续性, 可取 $U_-(p)\subset V_-(p)$, 使 $f(U_-(p))\cap[p,1]\subset V_+(p)$. 对这样的 $U_-(p)$, 有 $f(U_-(p))=(f(U_-(p))\cap[0,p])\cup(f(U_-(p))\cap[p,1])\subset U_-(p)\cup V_+(p)$. 由此易于归纳证明 $f^m(U_-(p))\subset U_-(p)\cup\{\bigcup\limits_{i=0}^{m-1}f^i(V_+(p))\}, \forall m>0$. 设 $x\in W^u(p,f,-), x\neq p$, 取满足条件的 $U_-(p)$, 且使 $x\notin U_-(p)$. 存在 $m>0, x\in f^m(U_-(p))\subset U_-(p)\cup\{\bigcup\limits_{i=1}^{m-1}f^i(V_+(p))\}$, 易见, $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{m-1}f^i(V_+(p))$. 由 $V_+(p)$ 的任意性, 故 $x\in W^u(p,f,+)$, 这就证明了 $W^u(p,f,-)\subset W^u(p,f,+)$. □

引理 2.1.31　*设 $f\in C^0(I), p\in F(f)$. 如果 $W^u(p,f)\nsubseteq W^u(p,f,+)$, 即存在 $x\in W^u(p,f), x>p, x\notin W^u(p,f,+)$, 则*

(1) *$W^u_-(p,f)\neq\{p\}$;*

(2) *存在 $y\in W^u_-(p,f), f(y)<y<p$;*

(3) *f 在 $\overline{W^u_-(p,f)}$ 上的最大值大于 p.*

证明　(1) 设 $W^u_-(p,f)=\{p\}$, 即 $W^u(p,f)=W^u_+(p,f)$. 易证 $W^u(p,f)=W^u(p,f,+)$. 这显然与 $x\notin W^u(p,f,+)$ 矛盾.

(2) 若对所有 $y \in W^u_-(p,f)$ 都有 $f(y) \geqslant y$, 据引理 2.1.30, $W^u(p,f,-) \subset W^u(p,f,+)$. 这又与 $x \notin W^u(p,f,+)$ 因而 $x \in W^u(p,f,-)$ 相矛盾.

(3) 据 (1), $\overline{W^u_-(p,f)}$ 是以 p 为右端点的闭线段. 记 f 在 $\overline{W^u_-(p,f)}$ 上的最大值为 M. 若 $M \leqslant p$, 则易于归纳证明 $f^m(\overline{W^u_-(p,f)}) \subset \overline{W^u_-(p,f)}, \forall m > 0$.

因 $x \notin W^u(p,f,+)$, 故存在 $V_+(p)$, 对所有 $m > 0, x \notin f^m(V_+(p))$. 取 $V(p) \subset \overline{W^u_-(p,f)} \cup V_+(p)$, 则对任意的 $m > 0$,

$$
\begin{aligned}
f^m(V(p)) &\subset f^m(\overline{W^u_-(p,f)} \cup V_+(p)) \subset f^m(\overline{W^u_-(p,f)}) \cup f^m(V_+(p)) \\
&\subset \overline{W^u_-(p,f)} \cup f^m(V_+(p)).
\end{aligned}
$$

由此即得 $x \notin f^m(V(p)), \forall m > 0$(注意 $x > p$, 故 $x \notin \overline{W^u_-(p,f)}$). 这与 $x \in W^u(p,f)$ 矛盾. □

引理 2.1.32 设 f 无同宿点, $p \in F(f)$, $x \in W^u(p,f)$. 则当 $x > p$ 时, $x \in W^u(p,f,+)$; 当 $x < p$ 时, $x \in W^u(p,f,-)$.

证明 下面只证明第一种情形. 用反证法, 设 $x \in W^u(p,f)$, $x > p$, $x \notin W^u(p,f,+)$. 据引理 2.1.31, 存在 y_1, $y_2 \in W^u_-(p,f)$, $f(y_1) < y_1 < p$, $f(y_2) > p$. 据介值定理, 在 y_1, y_2 之间存在 $y \in W^u_-(p,f), f(y) = p$. 显然 $y \neq p$. 这表明 y 是同宿点. 矛盾. □

引理 2.1.33 设 f 无同宿点, $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ 是其一个 n 周期轨道. 则

$$
p_j \notin W^u(p_i, f^n), \quad i \neq j.
$$

证明 用反证法, 设 $p_j \in W^u(p_i, f^n), i \neq j$. 我们断言, 对 $k = 1, 2, \cdots, n$, $W^u\ (p_k, f^n)$ 至少包含 $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\} - \{p_k\}$ 中一点. 为证此, 任取 $V(p_k)$, 并设 r 是使 $f^r(p_i) = p_k$ 的最小整数. 据连续性, 存在 $V(p_i), f^r(V(p_i)) \subset V(p_k)$. 因 $p_j \in W^u(p_i, f)$, 故存在 $m > 0$, 使得 $p_j \in f^{nm}(V(p_i))$. 于是

$$
f^r(p_j) \in f^r f^{nm}(V(p_i)) \subset f^{nm} f^r(V(p_i)) \subset f^{nm}(V(p_k)).
$$

由 $V(p_k)$ 的任意性, 有 $f^r(p_j) \in W^u(p_k, f^n)$. 由 $f^r(p_i) = p_k, p_i \neq p_j$, 易见 $f^r(p_j) \neq p_k$, 即 $f^r(p_j)$ 是

$$
\{p_1, p_2, \cdots, p_n\} - \{p_k\}
$$

中一点. 断言得证.

下面设 $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$. 因为 $W^u(p_1, f^n)$ 是包含 p_1 和 $\{p_2, \cdots, p_n\}$ 中一点的连通集, 据上述断言, 显然 $p_2 \in W^u(p_1, f^n)$. 同理, $p_1 \in W^u(p_2, f^n), p_3 \in W^u(p_2, f^n)$ 中有一个成立. 设 $p_1 \in W^u(p_2, f^n)$. 显然 $[p_1, p_2] \subset W^u(p_2, f^n)$. 由前一引理, $p_2 \in W^u(p_1, f^n, +)$. 故对任意 $V_+(p_1) \subset [p_1, p_2)$, 存在 $m > 0, p_2 \in$

$f^{nm}(V_+(p_1))$, 即存在 $p \in V_+(p_1) \subset [p_1, p_2)$, 使得 $f^{nm}(p) = p_2$, 而这表明 p 是同宿点, 矛盾. 这证明 $p_3 \in W^u(p_2, f^n)$.

同样可以证明 $p_{i+1} \in W^u(p_i, f^n), i = 1, \cdots, n-1$, 特别地, $p_n \in W^u(p_{n-1}, f^n)$. 但 $W^u(p_n, f^n)$ 包含 $\{p_1, \cdots, P_{n-1}\}$ 中一点, 故 $p_{n-1} \in W^u(p_n, f^n)$. 用与上面相同的方法, 亦可导出 f 有同宿点的矛盾. □

引理 2.1.34 设 f 无同宿点, 则 $p \in \Omega(f) \cap EP(f) \Rightarrow p \in P(f)$, 即非游荡的终于周期点是周期点.

证明 设 $p \in \Omega(f) \cap EP(f), \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ 为其进入 $\mathrm{orb}(p)$ 的 n 周期轨道. 据引理 2.1.29, 不妨设 $p \in W^u(p_1, f^n)$. 记 m 是使 $f^{mn}(p)$ 进入周期轨道的最小正整数, 并设 $f^{mn}(p) = p_i$. 易见 $f^{mn}(W^u(p_1, f^n)) = W^u(p_1, f^n)$, 因此 $p_i \in W^u(p_1, f^n)$. 因 f 无同宿点, 据引理 2.1.33, $p_i = p_1$. 若 $p \neq p_1$, 则 p 是同宿点, 矛盾. 故 $p \in P(f)$. □

引理 2.1.35 设 f 有同宿点, 则存在 $q \in \Omega(f) \cap EP(f) - P(f)$, 即存在非游荡的非周期的终于周期点.

证明 因为对任意正整数 $n > 0, P(f^n) = P(f)$, $\Omega(f^n) \subset \Omega(f)$, 下述证明不失普遍性.

设 $p \in F(f)$, 并存在 $x \in W^u(p, f)$, $x \neq p$, $f(x) = p, x$ 是一个同宿点. 不妨设 $x > p$, 即 $x \in W^u_+(p, f)$. 若 $x \in \Omega(f)$, 则 $x = q$ 即是所求的点. 故设 $x \notin \Omega(f)$. 下面证明, 存在 $q \in W^u(p, f)$, $q \neq p$, $f(q) = p$, $q \in \Omega(f)$. q 显然是非游荡的终于周期点, 但不是周期点. 分下述几种情形证明.

(i) 设 $f(W^u_+(p, f)) = \{p\}$.

由非稳定流形的定义和基本性质, 易于证明

$$W^u_-(p, f) \neq \{p\}, \quad W^u(p, f, +) = \{p\}, \quad W^u(p, f, -) = W^u(p, f).$$

因此 $x \notin W^u(p, f, +)$, $x \in W^u(p, f, -)$. 据引理 2.1.31, 存在 $y_0 \in W^u_-(p, f), f(y_0) < y_0 < p$. 又由

$$\begin{aligned} W^u(p, f) =& f(W^u(p, f)) = f(W^u_-(p, f) \cup W^u_+(p, f)) \subset f(W^u_-(p, f)) \cup f(W^u_+(p, f)) \\ =& f(W^u_-(p, f)), \end{aligned}$$

存在 $z_0 \in W^u_-(p, f), f(z_0) = x > p > z_0$.

由介值定理, 在 y_0, z_0 之间, 存在 $w \in W^u_-(p, f), w \neq p, f(w) = p$. 记 $K \subset W^u_-(p, f)$ 是包含 y_0 的最大连通相对开子集, 满足 $f(z) < p, \forall z \in K$. 显然这样的 K 存在. 当 $z_0 > y_0 (z_0 < y_0)$ 时记 q 为 K 的右 (左) 端点. 显然 $q \in W^u_-(p, f)$, $f(q) = p$, $q \neq p$, 且对任意 $V(q)$, $f(V(q))$ 包含某个 $V_-(p)$. 由 $W^u(p, f, -) = W^u(p, f)$, 易于看出 $q \in \Omega(f)$. q 即是所求的点.

(ii) 设 $f(W_+^u(p,f)) \neq \{p\}$, $f(W_+^u(p,f)) \subset W_+^u(p,f)$.

由存在同宿点 $x \in W_+^u(p,f)$, 易于证明存在 $y \in W_+^u(p,f)$, $y \neq p$, $f(y) = p$, 且对任意的 $V(y)$ 存在 $z \in V(y)$, 使得 $f(z) > p$.

若 $y \in W^u(p,f,+)$, 则因任意 $V(y), f(V(p))$ 包含某一个 $V_+(p)$, 易于看出 $y \in \Omega(f)$, $y = q$ 即是所求的点.

若 $y \notin W^u(p,f,+)$, 则 $y \in W^u(p,f,-)$. 用类似上面的方法可以证明, 存在 $q \in W_-^u(p,f), q \neq p, f(q) = p, q \in \Omega(f)$. q 即是所求的点.

(iii) 设 $f(W_+^u(p,f)) \neq \{p\}, f(W_+^u(p,f)) \subset W_-^u(p,f)$.

由存在同宿点 $x \in W_+^u(p,f)$, 易于证明存在 $q \in W_+^u(p,f), q \neq p, f(q) = p$, 且对任意 $V(q)$, 存在 $y \in V(q), f(y) < p$.

若 $q \in W^u(p,f,-)$, 则因为对任意 $V(q), f(V(q))$ 包含某个 $V_-(p)$, 故 $q \in \Omega(f)$.

若 $q \in W^u(p,f,+) \neq \{p\}$. 由假设和 f 的连续性, 存在 $V_+(p), f(V_+(p))$ 包含在任意给定的 $V_-(p)$ 内. 故亦有 $q \in W^u(p,f,-)$. 由上面证明, $q \in \Omega(f)$ 即是所求的点.

(iv) 设 $f(W_+^u(p,f)) \neq \{p\}$, $f(W_+^u(p,f)) \cap W_+^u(p,f) \neq \{p\}$, $f(W_+^u(p,f)) \cap W_-^u(p,f) \neq \{p\}$. 存在 $y_1, y_2 \in W_+^u(p,f), f(y_1) > p, f(y_2) < p$. 记 $K \subset W_+^u(p,f)$ 为包含 y_1 的最大连通开子集 (相对 $W_+^u(p,f)$), 满足 $f(z) > p, \forall z \in K$. 这样的 K 显然存在. 当 $y_1 < y_2 (y_1 > y_2)$ 时, 记 K 的右 (左) 端点为 w. 显然 $w \in W_+^u(p,f)$, $w \neq p$, $f(w) = p$.

当 $w \in W^u(p,f,+)$ 时, 因对任意 $V(w), f(V(w))$ 包含一个 $V_+(p)$, 故 $w \in \Omega(f), w = q$ 即是所求的点.

当 $w \notin W^u(p,f,+)$ 时, 则 $w \in W^u(p,f,-)$. 用类似 (i) 的方法可以证明, 存在 $q \in W_-^u(p,f), q \neq p$, $f(q) = p$, $q \in \Omega(f)$. q 即是所求的点.

(i)—(iv) 包含了假设同宿点 $x \in W_+^u(p,f)$ 的全部可能情形. 当 $x \in W_-^u(p,f)$ 时同样可以证明. 引理证毕. □

命题 2.1.28 的证明 充分性由引理 2.1.34 给出; 必要性由引理 2.1.35 给出. □

定理 2.1.36 $\Omega(f) = P(f) \Leftrightarrow \overline{P(f)} = P(f)$.

这个问题的讨论始于 20 世纪 六七十年代 Block 的一系列文章. 他从最简单的情形开始研究, 例如, 他首先证明, 当非游荡集基数有限时, 非游荡点集等于周期点集, 随后很多作者加入这一讨论而逐步深入. 这些讨论在今天看来是非常简单的, 但在线段动力系统刚刚开始被研究时却并不简单, 而正是这个由简单到逐步深入的过程, 使得人们对线段动力系统的认识不断加深, 而且对一般动力系统的理解也有启迪作用. 上述结果是有关非游荡集结构的第一个重要结果. 这个结论对一般动力系统不成立.

命题 2.1.37 若 f 有同宿点, 则 $\overline{P(f)} \neq P(f)$.

这个命题的证明已包含在命题 2.1.28 中.

推论 2.1.38 若 $\overline{P(f)} = P(f)$, 则 f 无同宿点.

为了证明定理 2.1.36, 还需证明一些引理.

引理 2.1.39 设 f 无同宿点, $p \in F(f)$, $q \in P(f)$, $p < q$, $(p,q) \cap P(f) = \varnothing$. 若

$$(p,q) \subset W_+^u(p,f), \quad f(x) < x, \quad \forall x \in (p,q),$$

则

$$x \in (p,q) \cap \Omega(f) \Rightarrow x \in \Omega(f^2).$$

证明 据引理 2.1.30, 有 $W^u(p,f,+) \subset W^u(p,f,-)$.

我们断言, $f(W_+^u(p,f)) \subset W_-^u(p,f)$. 若不然, 则据推论 2.1.26, 有 $f(W_+^u(p,f)) \subset W_+^u(p,f)$. 但由此不难看出, $f(W_-^u(p,f)) \subset W_-^u(p,f)$, $W_-^u(p,f) = W^u(p,f,-)$, $W_+^u(p,f) = W^u(p,f,+)$. 但这与 $W^u(p,f,+) \subset W^u(p,f,-)$ 矛盾. 断言得证.

由 $f(W_+^u(p,f)) \subset W_-^u(p,f)$, 有 $f(W_-^u(p,f)) \subset W_+^u(p,f)$. 由此不难证明

$$x \in (p,q) \cap \Omega(f) \Rightarrow x \in \Omega(f^2).$$

□

引理 2.1.40 设 f 无同宿点, $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_{2^l}\}$ 是其一个 2^l 周期轨道, $l > 0$. 则

(1) $f(W^u(p_i, f^{2^l})) = W^u(f(p_i), f^{2^l}), i = 1, 2, \cdots, 2^l$;

(2) $\{p_i, p_{i+1}\}, i = 1, 2, \cdots, 2^{l-1} - 1$ 都是 $f^{2^{l-1}}$ 的 2 周期轨道 (共 2^{l-1} 个);

(3) $W^u(p_i, f^{2^l}) \cap W^u(p_j, f^{2^l}) \neq \varnothing \Rightarrow p_i, p_j$ 属于 $f^{2^{l-1}}$ 的同一个 2 周期轨道, 即 (2) 中的一个.

证明 前两个是明显的. 因为 f 无同宿点, 故轨道 P 是单纯的 (见定义 2.1.21), 因此 $f^{2^{l-1}}$ 的 2 周期轨道的两点是相邻的, 由稳定流形的连通性和引理 2.1.33, 易见 (3) 亦成立. □

推论 2.1.41 假设同上. 则对任意的 $m > 0$, $f^m(W^u(p_i, f^{2^l})) \cap W^u(p_i, f^{2^l}) \neq \varnothing \Rightarrow m$ 是 2^{l-1} 的倍数, $i = 1, 2, \cdots, 2^l$.

据引理 2.1.33, 显然.

引理 2.1.42 设 f 无同宿点, $p \in P(f)$, 周期为 $2^l (l > 0)$, 且 p 为轨道中最小的一点, 其轨道为单纯轨道. 则 $x \in \Omega(f) \cap W^u(p,f) \Rightarrow x \in \Omega(f^{2^{l-1}})$.

证明 据引理 2.1.7, 有

$$W^u(p,f) = \bigcup_{i=1}^{2^l} W^u(f^i(p), f^{2^l}(p)),$$

$$f^i(W^u(p,f^{2^l}))=W^u(f^i(p),f^{2^l}),\quad i=1,2,\cdots,2^l.$$

不失普遍性, 可设 $x\in W^u(p,f^{2^l})$ 且为内点, 否则, 据引理 2.1.10, $x\in P(f)$, 结论自然成立. 取 $V(x)\subset W^u(p,f^{2^l})$. 据单纯周期轨道的性质, $\{p,f^{2^{l-1}}(p)\}$ 是 $f^{2^{l-1}}$ 的 2 周期轨道. 设 $f^m(V(x))\cap V(x)\neq\varnothing$, 易见 m 是 2^{l-1} 的倍数, 否则将导致 $W^u(p,f^{2^l})$ 包含轨道中其他的点, 与引理 2.1.33 矛盾. 因此 $x\in\Omega(f^{2^{l-1}})$. □

引理 2.1.43 设 f 无同宿点, $K_1,K_2\subset I$ 都是闭线段, 且 $f(K_1)\subset K_2,f(K_2)\subset K_1$. 则 $x\in\Omega(f)\cap(K_1\cup K_2-K_1\cap K_2)\Rightarrow x\in\Omega(f^2)$.

证明 易见 $f^2(K_i)\subset K_i,i=1,2$. 取 $V(x)\subset K_1(K_2)$, 易见 $f^m(V(x))\cap V(x)\neq\varnothing\Rightarrow m$ 是偶数, 因此 $x\in\Omega(f)\Rightarrow x\in\Omega(f^2)$. □

引理 2.1.44 设 f 无同宿点, $p<q$ 是两个周期点, 周期分别为 $2^l,2^k(l,k\geqslant 0)$,$(p,q)\cap P(f)=\varnothing$, 则 $(p,q)\subset W^u_+(p,f^{2^l})$, $(p,q)\subset W^u_-(q,f^{2^k})$ 成立且只成立一个.

证明 不妨设 $k\geqslant l$. 由 $(p,q)\cap P(f)=(p,q)\cap P(f^k)=\varnothing$, 且 $p,q\in F(f^{2^k})$ 知, $f^{2^k}(x)>x$, 或 $f^{2^k}(x)<x,\forall x\in(p,q)$ 成立且只成立一个. 前者成立, 则 $(p,q)\subset W^u_+(p,f^{2^k})=W^u_+(p,f^{2^l})$, 后者成立, 则 $(p,q)\subset W^u_-(q,f^{2^k})$.

下面假设两者同时成立. 先设 $f^{2^k}(x)>x,\forall x\in(p,q)$. 我们断言, $f^{2^k}(x)<q,\forall x\in(p,q)$. 否则, 由 $f^{2^k}(p)=p<q$ 和介值定理, 存在 $y\in(p,q)\subset W^u_-(p,f^{2^k})$, $f^{2^k}(y)=q$. y 显然是 f 的一个同宿点, 矛盾. 于是由 $x<f^{2^k}(x)<q$, 易由单边非稳定流形的定义直接证明, $W^u(q,f^{2^k},-)=\{q\}$.

由 $f^{2^k}(x)<q,\forall x\in(p,q)$ 易证 $f^{2^k}(W^u_-(q,f^{2^k}))\subset W^u_-(q,f^{2^k})$, 由此显然亦有 $f^{2^k}(W^u_+(q,f^{2^k}))\subset W^u_+(q,f^{2^k})$. 由单边非稳定流形的定义易见

$$W^u_-(q,f^{2^k})=W^u(q,f^{2^k},-),\quad W^u_+(q,f^{2^k})=W^u(q,f^{2^k},+),$$

但这与上述 $W^u(q,f^{2^k},-)=\{q\}$. 矛盾.

当 $f^{2^k}(x)<x,\forall x\in(p,q)$ 时亦可导致矛盾. □

引理 2.1.45 设 f 无同宿点且 $\overline{P(f)}=P(f),a<b$ 分别是 f 的最大、最小周期点, 则

$$(I-[a,b])\cap\Omega(f)=\varnothing.$$

证明 设 $a>0$, 周期为 $2^l,l\geqslant 0$. 先证明 $[0,a)\cap\Omega(f)=\varnothing$.

因为 $[0,a)$ 上无 f 的周期点, 易于看出 $f^n(x)>x,\forall x\in[0,a),\forall n>0$.

对任意点 $y\in[0,a)$, 记

$$W_y=\bigcup_{n>0}f^n([y,a])=\bigcup_{k=0}^{2^l-1}\left\{\bigcup_{m\geqslant 0(k=0,m>0)}f^{m\cdot 2^l+k}([y,a])\right\}.$$

易于看出 $W_y \subset I$ 对 f 不变且至多包含 2^l 个连通分支, $\overline{W_y}$ 也有同样性质. 显然 $f^n(y) \in \overline{W_y}, \forall n > 0$. 记 $\overline{W_y}$ 的下确界为 a_y. 易见 $a_y \leqslant a$, $[a_y, a] \subset \overline{W_y}$.

又记

$$\overline{W_{y,0}} = \overline{\bigcup_{m>0} f^{m\cdot 2^l}([y,a])} \subset \overline{W_y}.$$

易见 $\overline{W_{y,0}}$ 连通且对 f 不变. 又 $f^{n\cdot 2^l}(y) \in \overline{W_{y,0}}, \forall n > 0$. 我们断言, 对任意 $y \in [0,a)$ 恒有 $y \leqslant a_y$. 假设不然, $y > a_y$, 这时 $(a_y, y) \subset [a_y, a] \subset \overline{W_y}$. 对任意点 $z \in (a_y, y)$, 由 $\overline{W_y}$ 的构造可以看出, 存在 $w \in [y,a], k > 0$, 使 $f^k(w) = z < y \leqslant w$, 即 $f^k(w) < w$, 矛盾. 断言得证.

下面证明 $t \in [0,a) \Rightarrow t \notin \Omega(f)$. 分几种情形:

(1) 存在 $k > 0, f^k(t) \in P(f)$, 即 $t \in EP(f)$. 因 $t \notin P(f)$, 故据引理 2.1.34(非游荡终于周期点是周期点), $t \notin \Omega(f)$.

(2) 设 $t \notin EP(f)$. 又分两种情形:

① 存在 $k > 0, z = f^{k\cdot 2^l}(t) \in [0,a)$. 对 z 构造 $\overline{W_z}$. 由上述断言, 有 $t < z = f^{k\cdot 2^l}(t) \leqslant a_z$, 即 $t \notin \overline{W_z}$, 但 $f^{(k+1)\cdot 2^l}(t) \in \overline{W_{z,0}} \subset \overline{W_z}$, 因为 $\overline{W_z}$ 的连通分支有限, 易证 $t \notin \Omega(f)$.

② $\forall k > 0, f^{k\cdot 2^l}(t) \notin [0,a,)$, 即 $f^{k\cdot 2^l}(t) > a$. 显然存在 $p, q \in P(f) \cup \{0,1\}$, $a < p < q$, $(p,q) \cap P(f) = \varnothing$, $f^{2^l}(t) \in (p,q)$ ($q = 1 \notin P(f)$ 时, $f^{2^l}(t) \in (p,q)$). 可以证明, 存在 $z \in (t,a)$, $m > 0$, $f^{m\cdot 2^l}(t) \in \overline{W_{z,0}} \subset \overline{W_z}$. 但由上面断言, $t < z \leqslant a_z$, 即 $z \notin \overline{W_z}$, 同样可以证明 $t \notin \Omega(f)$.

当 $b < 1$ 时, 同样可以证明 $(b,1] \cap \Omega(f) = \varnothing$. □

引理 2.1.46 设 f 无同宿点, 且 $p_1 < q \leqslant p_2$, $f(p_1) = p_2$, $f(p_2) = p_1$, $q \in P(f)$, $(p_1, q) \cap P(f) = \varnothing$. 如果 $(p_1, q) \subset W_+^u(p_1, f)$, 则

(1) $p_1, p_2 \notin \overline{W^u(p_1, f^2)} \cap \overline{W^u(p_2, f^2)}$;

(2) $t \in (p_1, q) \cap \Omega(f) \Rightarrow t \in \Omega(f^2)$.

证明 (1) 记 $K = \overline{W^u(p_1, f^2)} \cap \overline{W^u(p_2, f^2)}$. 易见 K 对 f 不变, 故 p_1, p_2 一个属于 K, 另一个亦然. 下设两者均属于 K. 据引理 2.1.33, $p_1 \notin W^u(p_2, f^2), p_2 \notin W^u(p_1, f^2)$, 由此可以推出 $K = [p_1, p_2]$, 且由它对 f 的不变性, 易由单边非稳定流形的定义可以看出

$$W^u(p_1, f^2, +) = W_+^u(p_1, f^2) = [p_1, p_2), \quad W^u(p_2, f^2, -) = W_-^u(p_2, f^2) = (p_1, p_2].$$

我们断言 $f^2(x) > x, \forall x \in (p_1, q)$. 因 $(p_1, q) \cap P(f) = \varnothing$, 故相反的情形是 $f^2(x) < x, \forall x \in (p_1, q)$, 由 K 对 f^2 的不变性, 可以看出 $W^u(p_1, f^2, +) = \{p_1\}$, 但这与上面矛盾. 断言得证.

令 $\underline{M}$ 是 f^2 在 $[q,p_2](\subset K)$ 上的最小值. 下面证明 $q \geqslant \underline{M} > p_1$.

$q \geqslant \underline{M}$ 是明显的, 因为 q 的轨道包含在 $[q,p_2]$ 内, 故在 $[q,p_2]$ 上有点在 f^2 作用下可达到 q.

现证 $\underline{M} > p_1$. 设不然, 即 $\underline{M} = p_1$(由 K 对 f^2 的不变性, $\underline{M} < p_1$ 是不可能的). 这时存在 $x \in [q,p_2], f^2(x) = p_1$. 当 $x \in [q,p_2)$ 时, x 为同宿点, 矛盾. 当 $x = p_2$ 时, $f^2(p_2) = p_2 > p_1$, 亦矛盾. 故 $\underline{M} > p_1$.

由 $q \geqslant \underline{M} > p_1, f^2(x) > x, \forall x \in (p_1,q), f^2(K) \subset K$, 易见 $[\underline{M},p_2]$ 对 f^2 亦不变. 由 $p_1 \in \overline{W^u(p_2,f^2,-)} = \overline{W^u_-(p_2,f^2)}, \underline{M} > p_1$, 显然存在 $y \in W^u(p_2,f^2,-) = W^u_-(p_2,f^2)$, 但 $y \notin [\underline{M},p_2]$, 这与 $[\underline{M},p_2]$ 对 f^2 的不变性矛盾. 矛盾由假设 $p_1,p_2 \in K$ 引起, 故 $p_1,p_2 \notin K$. (1) 证毕.

(2) 当 $(p_1,q) \cap K = \varnothing$ 时, 据引理 2.1.43, $t \in (p_1,q) \cap \Omega(f) \Rightarrow t \in \Omega(f^2)$.

下设 $(p_1,q) \cap K \neq \varnothing$. 显然 $q \in K$, 否则有 $K \subset (p_1,q)$, 而 $(p_1,q) \cap P(f) = \varnothing$, 这导致 $f|_K : K \to K$ 无不动点, 不可能.

记 $K = [a,b] \subset (p_1,p_2)$. 当 $a = b$ 时, $a = b = q$, 结论显然成立.

下设 $a < b$. 记 $g = f|_K$. q 显然是 g 最小的周期点. 据引理 2.1.45, 当 $t \in (p_1,q) \cap K$ 为内点时, $t \notin \Omega(g)$, 因而 $t \notin \Omega(f)$.

当 $t \in (p_1,q), t \notin K$ 时, $t \in \overline{W^u(p_1,f^2)} \cup \overline{W^u(p_2,f^2)} - K$, 据引理 2.1.43, $t \in \Omega(f) \Rightarrow t \in \Omega(f^2)$.

还有一种情况是 $t = a$. 下面分几种情形证明 $a \notin \Omega(f)$.

首先设 $f(a) \in K$ 为内点. 取 $V(a) = (c,d) \subset (p_1,q)$, 使 $f(V(a)) \subset K$. 易见 $[c,b](\supset K)$ 对 f 不变. 因 $a \in (c,b), a < q$, 可证 $a \notin \Omega(f)$.

其次设 $f(a) = b$. 若 $f^2(a) = a$ 或 $f^2(a) = b$, 则 a 为终于周期点, 亦有 $a \notin \Omega(f)$.

最后设 $f(a) = b, f^2(a) \in K$ 为内点. 取 $V(a) = (c,d) \subset (p_1,q)$ 使 f 在 $\overline{V(a)}$ 上的最小值大于 a 且 $f^2(V(a)) \subset K$. 令 $\overline{M}$ 为 f 在 $[c,d]$ 上的最大值. 显然 $\overline{M} \geqslant b$. 易于验证 $[c,\overline{M}] = \overline{V(a)} \cup K \cup \overline{f(V(a))}$ 对 f 不变. 这是因为

$$f([c,a]) \subset [a,\overline{M}] \subset [c,\overline{M}], \quad f((a,b]) = f(K) = K \subset [c,\overline{M}]$$

和

$$f([b,\overline{M}]) \subset f^2([c,d]) \subset K \subset [c,\overline{M}].$$

因 $a \in (c,\overline{M}), a < q$, 同样可以证明 $a \notin \Omega(f)$. (2) 证毕. □

引理 2.1.47 设 f 无同宿点, $\overline{P(f)} = P(f)$, $p \in F(f)$, $q \in P(f)$, $p < q$, $(p,q) \cap P(f) = \varnothing$. 如果 $(p,q) \subset W^u_+(p,f), f(x) > x, \forall x \in (p,q)$, 则 $(p,q) \cap \Omega(f) = \varnothing$.

证明 由假设易见, $f(\overline{W^u_+(p,f)}) \subset \overline{W^u_+(p,f)}$. 记 $\overline{W^u_+(p,f)} = [p,s]$, 易见 $q \leqslant s < 1$. 记 $\underline{M}$ 为 f 在 $\overline{W^u_+(p,f)} \cap [q,1] = [q,s]$ 上的最小值. 用证明前一引理中的方

法可以证明, $q \geqslant \underline{M} > p$, 且 $[\underline{M}, s]$ 对 f 不变, 进而对任意 $M \in (P, \underline{M}], [M, s]$ 亦对 f 不变. 记 $g = f|_{[M,s]}$. 显然 $q \in [M, s]$ 是 g 的最小周期点. 据引理 2.1.45, g 在 $[M, q]$ 上无非游荡点, 显然 f 在 (M, q) 上无非游荡点. 由 $M \in (p, \underline{M})$ 的任意性, 即得 $(p, q) \cap \Omega(f) = \varnothing$. □

引理 2.1.48 设 f 无同宿点, $\overline{P(f)} = P(f), p, q \in P(f), p < q$, 其周期分别为 $2^l, 2^k, l \geqslant 0, k \geqslant 0$, 且 $(p, q) \cap P(f) = \varnothing$, 则

(1) $(p, q) \subset W^u_+(p, f^{2^l}) \Rightarrow (p, q) \cap \Omega(f^{2^l}) = \varnothing$;

(2) $(p, q) \subset W^u_-(q, f^{2^k}) \Rightarrow (p, q) \cap \Omega(f^{2^k}) = \varnothing$.

证明 (1) 因 $(p, q) \cap P(f) = \varnothing$, 故 $f^{2^l}(x) > x, \forall x \in (p, q)$ 或 $f^{2^l}(x) < x, \forall x \in (p, q)$. 对前者, 对 f^{2^l} 应用上一引理, 可得 $(p, q) \cap \Omega(f^{2^l}) = \varnothing$.

当 $f^{2^l}(x) < x, \forall x \in (p, q)$ 时, 对 f^{2^l} 应用引理 2.1.39, 有 $t \in (p, q) \cap \Omega(f^{2^l}) \Rightarrow t \in \Omega(f^{2^{l+1}})$. 易证 $f^{2^{l+1}}(x) > x, \forall x \in (p, q)$. 对 $f^{2^{l+1}}$ 应用上一引理, 得 $(p, q) \cap \Omega(f^{2^{l+1}}) = \varnothing$, 因此 $(p, q) \cap \Omega(f^{2^l}) = \varnothing$.

(2) 证明相仿. □

定理 2.1.36 的证明 必要性是明显的, 因为非游荡集是闭的. 下面证明充分性.

设 $t \in I, t \notin P(f)$. 我们证明 $t \notin \Omega(f)$.

存在 $p, q \in P(f) \cup \{0, 1\}, p < q, (p, q) \cap P(f) = \varnothing, t \in (p, q)$(当 $p = 0 \notin P(f)$ 时, $t \in [0, p)$; 当 $q = 1 \notin P(f)$ 时, $t \in (p, 1]$).

当 $p = 0 \notin P(f)$ 或 $q = 1 \notin P(f)$ 时, 据引理 2.1.45, $t \notin \Omega(f)$.

下设 p, q 都是周期点, 周期分别为 $2^l, 2^k, l, k \geqslant 0$. 据引理 2.1.44, $(p, q) \subset W^u_+(p, f^{2^l}), (p, q) \subset W^u_-(q, f^{2^k})$ 成立且只成立一个. 下面只证明前者, 后者证明相仿.

下面设 $(p, q) \subset W^u_+(p, f^{2^l})$. 分 $l = 0, l = 1, l > 1$ 三种情形:

$l = 0$, 即 $p \in F(f)$.

当 $f(x) > x, \forall x \in (p, q)$ 时, 据引理 2.1.47, $t \notin \Omega(f)$.

当 $f(x) < x, \forall x \in (p, q)$ 时, 据引理 2.1.39, $t \in (p, q) \cap \Omega(f) \Rightarrow x \in \Omega(f^2)$, 且易证 $f^2(x) > x, \forall x \in (p, q)$. 因 $(p, q) \subset W^u_+(p, f) = W^u_+(p, f^2)$, 对 f^2 应用引理 2.1.47, 有 $t \notin \Omega(f^2)$. 故 $t \notin \Omega(f)$.

$l = 1$. 记 $f(p) = p^1, f(p^1) = p$.

当 $(p, q) \cap \overline{W^u(p, f^2)} \cap \overline{W^u(p^1, f^2)} = \varnothing$ 时,

$$(p, q) \subset \overline{W^u(p, f^2)} \cup \overline{W^u(p^1, f^2)} - \overline{W^u(p, f^2)} \cap \overline{W^u(p^1, f^2)}.$$

对 $\overline{W^u(p, f^2)}, \overline{W^u(p^1, f^2)}$ 应用引理 2.1.43, 则 $t \in (p, q) \cap \Omega(f) \Rightarrow t \in \Omega(f^2)$. 再对 f^2 重复上述 $l = 1$ 时的讨论, 有 $(p, q) \cap \Omega(f) = \varnothing$, 故 $t \notin \Omega(f)$.

当 $(p,q)\cap\overline{W^u(p,f^2)}\cap\overline{W^u(p^1,f^2)}\neq\varnothing$ 时, 显然 $p<q\leqslant P^1$(若 $p_1<p$, 则可以推出 $p\in W^u(p^1,f^2)$, 据引理 2.1.33, 这不可能). 据引理 2.1.46,$t\in(p,q)\cap\Omega(f)\Rightarrow x\in\Omega(f^2)$. 对 f^2 重复上述 $l=0$ 的讨论, 得 $(p,q)\cap\Omega(f^2)=\varnothing$, 故 $t\notin\Omega(f)$.

下设 $l>1$.

据引理 2.1.42, $t\in(p,q)\cap\Omega(f)\Rightarrow t\in\Omega(f^{2^{l-1}})$. 对 $f^{2^{l-1}}$ 重复上述 $l=1$ 的讨论, 得 $t\notin\Omega(f^{2l-1})$, 故 $t\notin\Omega(f)$.

定理 2.1.36 证毕. □

推论 2.1.49 *f 的周期点的周期有上界, 则 $\Omega(f)=P(f)$.*

证明 设 f 的周期点的周期上界为 $2^n,n>0$. 因为 f 的周期点的周期都是 2 的方幂, 故

$$P(f)=P(f^{2^n})=F(f^{2^n})=\overline{F(f^{2^n})},$$

即 $P(f)$ 是闭集, 它显然无同宿点, 故 $\Omega(f)=P(f)$. □

定理 2.1.50 *设 $f\in C^0(I)$, 则*

$$\mathrm{ent}(f)=0\Leftrightarrow p(f)\subseteq\{2^n,n\geqslant 0\}.$$

这就是所谓的小熵猜测. 这个结果对线段动力系统当然是重要的, 但对一般情形也是不成立的. 它启迪人们去寻求一般情形拓扑熵为零的充要条件. 据 Bowen-Franks 定理 (定理 2.1.3), 必要性是明显的, 因此只需证明充分性即可. 又据定理 2.1.12, f 无非 2 方幂周期等价于它无同宿点, 因此我们证明它的一个等价形式.

定理 2.1.51 *f 无同宿点 $\Rightarrow\mathrm{ent}(f)=0$.*

下述证明方法是基于对非游荡集 (周期点集) 的分析而提出的. 我们分两步证明它. 首先应用拓扑熵的 Bowen 的生成集定义证明一种特殊情形. 其次, 对一般情形, 适当改造原映射, 定义某种商空间和诱导商映射, 然后应用拓扑熵的开覆盖定义, 通过商映射并利用特殊情形而完成证明.

先引进 “中心和深度” 概念, 但仅限于线段自映射的情形, 并引用某些结论而不加证明.

下面设 $f\in C^0(I)$.

定义 2.1.52 (中心和深度) *记 $\Omega(f)=\Omega_0(f)$, 并记 $\Omega_1(f)$ 为 $f|_{\Omega_0(f)}:\Omega_0(f)\to\Omega_0(f)$ 的非游荡集. 归纳地, 设 $m>0,\Omega_m(f)$ 为 $f|_{\Omega_{m-1}(f)}:\Omega_{m-1}(f)\to\Omega_{m-1}(f)$ 的非游荡集. 若存在 $k>0,\Omega_{k-1}(f)=\Omega_k(f)$, 则称 $\Omega_{k-1}(f)$ 是 f 的中心, 记作 $ZX(f)$, 并称 k 是它的深度.*

关于中心和深度我们不作过多考虑, 但需要下述命题中的结论 (2).

命题 2.1.53 *(1) f 的中心为 $\overline{P(f)}$, 深度最大为 2;*

(2) $\mathrm{ent}(f)=\mathrm{ent}(f|_{\overline{P(f)}})$.

无同宿点情形的证明参见文献 [65], 一般情形的证明参见文献 [54].

为证明定理 2.1.51, 还需做一系列准备, 参见文献 [72]. 下面恒设 $f \in C^0(I)$ 无同宿点.

引理 2.1.54 $f(\overline{P(f)}) = P(f), f(\overline{P(f)} - P(f)) = \overline{P(f)} - P(f)$.

证明从略.

引理 2.1.55 设 $P = \{p_1 < p_2 < \cdots < p_{2^n}\}$ 是 f 的 2^n(单纯) 周期轨道 $n > 0$. 则

$$\overline{W^u(p_i, f^{2^n})} \cap \overline{W^u(p_j, f^{2^n})} \neq \varnothing \Rightarrow i = j$$

或

$$i = 2k-1, \quad j = 2k, \quad 1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}$$

和

$$f^m(\overline{W^u(p_i, f^{2^n})}) \cap \overline{W^u(p_i, f^{2^n})} \neq \varnothing \Rightarrow m = d \cdot 2^{n-1}, \quad d \in \mathbb{Z}_+, \quad i = 1, 2, \cdots, 2^n.$$

证明 注意到 p_{2k-1}, p_{2k} 是 $f^{2^{n-1}}$ 的一个 2 周期轨道, 引理的前一部分由引理 2.1.33 给出. 后一部分亦可从中看出. □

推论 2.1.56 设 $p \in P(f)$ 周期为 $2^n (n \geqslant 2)$. 则

$$\overline{W^u(p, f^{2^n})} \cap F(f^{2^{n-2}}) = \varnothing.$$

证明 设 $q \in \overline{W^u(p, f^{2^n})} \cap F(f^{2^{n-2}})$, 则 $q = f^{2^{n-2}}(q) \in f^{2^{n-2}}(\overline{W^u(p, f^{2^n})}) \cap \overline{W^u(p, f^{2^n})}$, 2^{n-2} 不是 2^{n-1} 的倍数, 与引理 2.1.55 矛盾. □

引理 2.1.57 设 $x \in \Omega(f) - P(f)$ 和 $N > 0$, 则存在 $p \in P(f)$, p 的周期为 $2^n \geqslant N$, 使 $x \in W^u(p, f^{2^n})$.

证明 记 $W = \bigcup\limits_{p \in P(f)} W^u(p, f)$, 可以证明

$$(I - W) \cap \Omega(f) = \varnothing.$$

再者, 在无同宿点的假设条件下, 可以证明 $\Omega(f) = \Omega(f^{2^n}), \forall n > 0$(参见文献 [65]). 利用这些结果, 不难证明本引理. 这里不去证明, 希望读者自己完成. □

引理 2.1.58 对任意的 $\varepsilon > 0$, 对每一点 $\forall p \in P(f)$, 存在 $V(p)$, 使得直径 $d(f^m(V(p)) \cap \overline{P(f)}) < \varepsilon, \forall m \geqslant 0$.

证明留给读者完成.

推论 2.1.59 对任意的 $\varepsilon > 0$, 对每一点 $q \in \overline{P(f)}$, 存在 $V(q)$, 使得对任意的 $m \geqslant 0$, 有 $d(f^m(V(q)) \cap \overline{P(f)}) < \varepsilon$.

利用上述引理不难证明, 从略.

下面附加一个假设, 即设 $I-\overline{P(f)}$ 的每一个连通分支都至少有一个端点属于 $P(f)\cup\{0,1\}$. 在这个附加条件下的小熵猜测称为特殊情形. 我们先来证明特殊情形的小熵猜测.

引理 2.1.60 设 $\{p_{i_1},p_{i_2},\cdots\}$ 是 f 的任意周期递升的周期点序列, 相应周期为 2^{i_n}. 则

$$d(W^u(p_{i_n},f^{2^{i_n}})\cap\overline{P(f)})\to 0\quad(n\to\infty).$$

在附加假设的条件下, 利用引理 2.1.55 不难加以证明, 请读者完成.

下面给出特殊情形小熵猜测的证明.

设 $\varepsilon>0$. 当取遍 $q\in\overline{P(f)}$ 时, 满足推论 2.1.59 条件的 $V(q)$ 构成 $\overline{P(f)}$ 的一个开覆盖, 据紧致性, 可设 $\{V(q_1),V(q_2),\cdots,V(q_l)\}$ 是它的一个子覆盖. 易见,$\{q_1,q_2,\cdots,q_l\}$ 是 $\overline{P(f)}$ 关于 $f|_{\overline{P(f)}}$ 的一个 (n,ε) 生成集, $n>0$. 因此有 $r_n(\varepsilon,\overline{P(f)})\leqslant l,\forall n>0$. 据定义

$$\begin{aligned}\mathrm{ent}(f|_{\overline{P(f)}})&=\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r_n(\varepsilon,\overline{P(f)})\\&\leqslant\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log l=0.\end{aligned}$$

特殊情形小熵猜测证毕.

下面将为一般情形的证明做些准备. 我们将对 f 进行适当改造, 定义商空间和诱导商映射.

记

$$I-\overline{P(f)}=\{\cup(a_i,b_i)\}\cup\{\cup(c_i,d_i)\},$$

其中每一个 (a_i,b_i) 的两个端点都属于 $\overline{P(f)}-P(f)$, 而每一个 (c_i,d_i) 至少有一个端点属于 $P(f)\cup\{0,1\}$(当某一个 $c_i=0$ 时, 应改为 $[c_i,d_i)$ 等). 下面简称每一个 (a_i,b_i) 为 $I-P(f)$ 的 (a,b) 型连通分支. 每一个 (a,b) 型连通分支又有两种情形, 即 $f(a_i)=f(b_i),f(a_i)\neq f(b_i)$.

引理 2.1.61 对任意 (a,b) 型连通分支 (a_i,b_i), 有

$$f^m([a_i,b_i])\cap P(f)=\varnothing,\quad\forall m\geqslant 0.$$

证明 据假设, 存在 f 的周期点 $p_1<p_2$, 周期分别为 $2^{n_1},2^{n_2}(n_1,n_2$ 可以任意大), 使得 $[a_i,b_i]\subset(p_1,p_2)$, 且 $[a_i,b_i]\subset W^u(p_1,f^{2^{n_1}})$ 或 $[a_i,b_i]\subset W^u(p_2,f^{2^{n_2}})$. 不妨设 $[a_i,b_i]\subset W^u(p_1,f^{2^{n_1}})$. 于是有

$$f^m([a_i,b_i])\subset f^m(W^u(p_1,f^{2^{n_1}}))=W^u(f^m(p_1),f^{2^{n_1}}).$$

据推论 2.1.56,

$$f^m([a_i,b_i])\cap F(f^{2^{n_1-2}})\subset W^u(f^m(p_1),f^{2^{n_1}})\cap F(f^{2^{n_1-2}})=\varnothing.$$

因为 n_1 可以任意大, 故

$$f^m([a_i,b_i])\cap P(f)=\varnothing,\quad \forall m>0.$$

□

引理 2.1.62　对任意 (a,b) 型连通分支 (a_i,b_i),

$$f^m([a_i,b_i])\cap [a_i,b_i]=\varnothing,\quad \forall m>0.$$

易由上引理推出, 证明从略.

对 f 改造如下.

定义 $\overline{f}:I\to I$, 满足

$$\overline{f}(x)=f(a_i),x\in[a_i,b_i],f(a_i)=f(b_i);$$

$$\overline{f}(x)=f(x),x\in I-\bigcup_{f(a_i)=f(b_i)}[a_i,b_i],$$

其中 (a_i,b_i) 是 (a,b) 型连通分支. 易见 $\overline{f}$ 有定义、连续, $f|_{\overline{P(f)}}=\overline{f}_{\overline{P(f)}}$, 无同宿点且 $\overline{P(f)}$ 对 $\overline{f}$ 亦不变.

引理 2.1.63　$p(f)=p(\overline{f}),P(f)=P(\overline{f})$, 其中 $p(\overline{f}),P(\overline{f})$ 分别是 $\overline{f}$ 的周期集合和周期点集.

从定义直接证明, 从略.

推论 2.1.64　$\mathrm{ent}(f)=\mathrm{ent}(\overline{f})$.

据命题 2.1.53, 显然.

容易看出, 用 $\overline{f}$ 代替 f, 上述讨论依然成立, 且 $I-\overline{P(f)}=I-\overline{P(\overline{f})}$.

引理 2.1.65　对每一个 (a,b) 型连通分支 (a_i,b_i), 若 $f([a_i,b_i])$ 不是单点集, 则存在另一个 (a,b) 型连通分支 $(a_j,b_j),j\neq i$, 使得 $\overline{f}([a_i,b_i])=[a_j,b_j]$.

证明　按定义, 易见 $\overline{f}([a_i,b_i])$ 的内集是 $I-P(\overline{f})$ 的一个 (a,b) 型连通分支, 由 $\overline{f}(\overline{P(\overline{f})}-P(\overline{f}))=\overline{P(\overline{f})}-P(\overline{f})$ (对 $\overline{f}$ 应用引理 2.1.54), 显然 $\overline{f}(a_i,b_i)$ 的内集对 $\overline{f}$ 也是一个 (a,b) 型连通分支, 结论是明显的.　□

下面构造商空间和定义由 $\overline{f}$ 诱导的商映射.

在 I 的点偶之间建立关系 $\sim$: $x\sim y\Leftrightarrow x=y$ 或 $x,y\in[a_i,b_i],(a_,b_i)$ 是一个 (a,b) 型连通分支. 容易看出, $\sim$ 是一个等价关系, 把 I 分成不相交的等价类. 记 x 所在的类为 $[x]$. 记集合 $\{[x],\forall x\in I\}$ 为 $I'=I/\sim$. 定义自然投影

$$\begin{cases}\pi:I\to I',\\ \pi(x)=[x],\quad \forall x\in I.\end{cases}\tag{2.1.2}$$

赋 I' 以商拓扑, 即 $U \subset I'$ 开当且仅当 $\pi^{-1}(U) \subset I$ 开. π 是在上连续闭映射. 定义

$$\begin{cases} f' : I' \to I', \\ f'([x]) = [\overline{f}(x)] = \pi(\overline{f}(x)), \quad \forall a \in I. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I} & \xrightarrow{\overline{f}} & \mathbb{I} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & {\scriptstyle\pi}\downarrow \\ \mathbb{I}' & \xrightarrow{f'} & \mathbb{I}' \end{array}$$

由引理 2.1.65, 易见 $x \sim y \Rightarrow \overline{f}(x) \sim \overline{f}(y)$, 因此 f' 是单值的, 且 $\pi\overline{f} = f'\pi$, 即上图表是交换的. 对任意开集 $U \subset I', \pi^{-1}f'^{-1}(U)$ 是 I 的开集. 据商拓扑的定义, $f'^{-1}(U)$ 是 I' 的开集, 因此 f' 是连续的.

易见, $f'^m([x]) = \pi[\overline{f}^m(x)] = [\overline{f}^m(x)], \forall x \in I$.

记 $I - \overline{P(\overline{f})}$ 的全体 (a,b) 型连通分支的长度和为 $\sum d((a_i,b_i)) = l$. 显然 $0 \leqslant l < 1$. $l = 0$ 是特殊情形, 因此可设 $l > 0$. 记 $[0, 1-l] = L$.

定义

$$\begin{cases} h : I' \to L, \\ h([x]) = d(0, \max \pi^{-1}([x])) - \displaystyle\sum_{(a_i,b_i)\subset[0,\max \pi^{-1}([x])]} d(a_i,b_i), \end{cases} \tag{2.1.4}$$

其中 $d(\cdot,\cdot)$ 表距离. 容易证明, h 在上、一对一和连续, 故是同胚映射 (注意 I', L 都是紧致 Hausdorff 空间).

记

$$\widetilde{f} = hf'h^{-1} : L \to L.$$

$\widetilde{f}$ 是线段自映射且与 f' 拓扑共轭. 又 $h\pi : I \to L$ 保序, 即 $x < y \in I \Rightarrow h\pi(x) < h\pi(y)$. 又有 $h\pi\overline{f} = \widetilde{f}h\pi$, 即下图表可交换. 又 $\overline{f}$ 与 $\widetilde{f}$ 拓扑半共轭.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I} & \xrightarrow{\overline{f}} & \mathbb{I} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & {\scriptstyle\pi}\downarrow \\ \mathbb{I}' & \xrightarrow{f'} & \mathbb{I}' \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow \\ \mathbb{L} & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \mathbb{L} \end{array}$$

引理 2.1.66 $p(\widetilde{f}) = p(\overline{f}), P(\widetilde{f}) = h\pi(P(\overline{f}))$.

推论 2.1.67 $\widetilde{f}$ 无同宿点.

推论 2.1.68 $\overline{P(\widetilde{f})} = h\pi(P(\overline{f}))$.

引理 2.1.69 $L-\overline{P(\widetilde{f})}$ 的每一个连通分支都至少有一个端点属于 $P(\widetilde{f})\cup\{0,1-l\}$, 其中 $0,1-l$ 是 L 的两个端点.

推论 2.1.70 $\mathrm{ent}(\widetilde{f})=\mathrm{ent}(\widetilde{f}|_{\overline{P(\widetilde{f})}})$.

引理 2.1.71 设 $x<y\in I$. 若 $x,y\notin\cup[a_i,b_i]$, 即不属于全体 (a,b) 型连通分支闭包的并集, 则 $h\pi((x,y))$ 是 L 的开集.

引理 2.1.72 设 $x<y\leqslant z<w\in I$. 若 $x,w\notin\cup(a_i,b_i)$, 对某个 (a,b) 型连通分支 $(a_i,b_i),y,z\in(a_i,b_i)$. 则 $h\pi((x,y))\cup h\pi((z,w))=h\pi((x,w))$ 是 L 的开集.

由上述定义等不难证明这些结论, 证明从略.

据推论 2.1.64, $\mathrm{ent}(f)=\mathrm{ent}(\widetilde{f})$, 因此, 为证小熵猜测的一般情形, 只需证明

$$\mathrm{ent}(\widetilde{f})=\mathrm{ent}(\widetilde{f}|_{\overline{P(\widetilde{f})}}).$$

下面用拓扑熵的开覆盖定义证明这个结论.

据文献 [50] 定理 7.6, 只需证明, $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\overline{P(\widetilde{f})}$ 的开覆盖 $\alpha,d(\alpha)\leqslant\varepsilon$, 使得

$$\mathrm{ent}(\widetilde{f}|_{\overline{P(\widetilde{f})}},\alpha)=0$$

即可, 其中 $\mathrm{ent}(\widetilde{f}|_{\overline{P(\widetilde{f})}},\alpha)$ 是 $\widetilde{f}|_{\overline{P(\widetilde{f})}}$ 对 α 的相对熵, $d(\alpha)=\sup_{A\in\alpha}d(A),d(A)$ 表集合 A 的直径.

设 $\varepsilon>0$ 已经给定. 使直径 $d((a_i,b_i))\geqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$ 的 $I-\overline{P(\widetilde{f})}$ 的 (a,b) 型连通分支个数有限, 设它们为

$$\{(a_1,b_1),\cdots,(a_l,b_l),l>0\}.$$

构造 $\overline{P(\widetilde{f})}$ 的开覆盖 $\alpha,d(\alpha)\leqslant\varepsilon$ 如下:

(1) 对每一个 $i=1,2,\cdots,l$, 存在递升的周期点系列 $\{p_1<p_2<\cdots<p_n<\cdots\}$ 收敛到 a_i. 取充分大的 n, 使 $d((p_n,a_i))\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. 又任取 $\overline{a_i}\in(a_i,b_i)$, 使 $0<\overline{a_i}-a_i<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 令 $V(a_i)=(p_n,\overline{a_i})$. 显然 $d(V(a_i))<\varepsilon$.

同样存在递降的周期点序列 $\{q_1>\cdots>q_n>\cdots\}$ 收敛到 b_i. 取充分大的 $n,d((b_i,q_n))<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 任取 $\overline{b_i}\in(a_i,b_i),0<b_i-\overline{b_i}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 令 $V(b_i)=(\overline{b_i},q_n)$. 显然 $d(V(b_i))<\varepsilon$.

(2) 对每一点 $x\in\overline{P(\widetilde{f})}-\bigcup_{i=1}^{l}(V(a_i)\cup V(b_i))$, 取连通邻域 $V(x)=(s,t),0<s<t<1$(当 $0,1\in\overline{P(\widetilde{f})}$ 时需作相应改变 $V(0)=[0,t),V(1)=(s,1]$), 满足

(i) $d((s,t))<\varepsilon$;

(ii) $s,t\notin\cup[a_i,b_i]$;

(iii) $(s,t)\cap\{\bigcup\limits_{i=1}^{l}[a_i,b_i]\}=\varnothing$. 容易看出, 这样的 $V(x)$ 是存在的.

所有上述的 $\{V(a_i),V(b_i),V(x)\}$ 构成 $\overline{P(\widetilde{f})}$ 的一个开覆盖, 记作 α, 显然, $d(\alpha)\leqslant\varepsilon$.

α 有下述性质:

(i) $h\pi(V(a_i)\cup V(b_i))=h\pi(V(a_i))\cup h\pi(V(b_i))$ 是 L 的开集 (引理 2.1.72);

(ii) $x\in \overline{P(\widetilde{f})}-\bigcup\limits_{i=1}^{l}(V(a_i)\cup V(b_i))$, 则 $h\pi(V(x))$ 是 L 的开集 (引理 2.1.71).

记 $h\pi(\alpha)$ 为由所有如上述的 $h\pi(V(a_i)\cup V(b_i)), h\pi(V(x))$ 组成的 L 的开集合族. 易于证明 $h\pi(\alpha)$ 是 $\overline{P(\widetilde{f})}$ 的一个开覆盖, 且 $d(h\pi(\alpha))\leqslant\varepsilon$.

据推论 2.1.70, $\operatorname{ent}(\widetilde{f}|_{\overline{P(\widetilde{f})}})=0$, 故

$$\operatorname{ent}(\widetilde{f}|_{\overline{P(\widetilde{f})}}, h\pi(\alpha))=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log H(h\pi(\alpha)\vee\widetilde{f}^{-1}h\pi(\alpha)\vee\cdots\vee\widetilde{f}^{-(n-1)}h\pi(\alpha))=0.$$

设 $\{h\pi(\alpha)\vee\widetilde{f}^{-1}h\pi(\alpha)\vee\cdots\vee\widetilde{f}^{-(n-1)}h\pi(\alpha)\}$ 的一个基数为 H 的有限子覆盖已经给定:

$$\{h\pi(A_{i_0})\cap\widetilde{f}^{-1}h\pi(A_{i_1})\cap\cdots\cap\widetilde{f}^{-(n-1)}h\pi(A_{i_{n-1}})\},$$

其中 $h\pi(A_{i_s})\in h\pi(\alpha), 1\leqslant i_s\leqslant H, s=0,1,\cdots,n-1$.

考虑相应的 I 的开集合族

$$\{A_{i_0}\cap\overline{f}^{-1}(A_{i_1})\cap\cdots\cap\overline{f}^{-(n-1)}(A_{i_{n-1}})\}.$$

容易证明, 它是 $\overline{P(\widetilde{f})}$ 的一个开覆盖, 但它不是

$$\{\alpha\vee\overline{f}^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee\overline{f}^{-(n-1)}(\alpha)\}$$

的子覆盖, 因为当 $A_{i_s}=V(a_i)\cup V(b_i)$ 时, 它不是 α 的元素, 而是 α 中元素 $V(a_i)$ 和 $V(b_i)$ 的并, 相应地, $\overline{f}^{-s}(V(a_i)\cup V(b_i))=\overline{f}^{-s}(V(a_i))\cup\overline{f}^{-s}(V(b_i))$ 也不是 $\overline{f}^{-s}(\alpha)$ 的元素, 而是其中两个元素的并. 这时用 $V(a_i)\cup V(b_i)$ 代替 A_i, 代入

$$\{A_{i_0}\cap\overline{f}^{-1}(A_{i_1})\cap\cdots\cap\overline{f}^{-(n-1)}(A_{i_{n-1}})\}$$

得到 I 的两个开集. 对所有可能的这种情形都进行同样代替, 最后得到的开集就都是

$$\{\alpha\vee\overline{f}^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee\overline{f}^{-(n-1)}(\alpha)\}$$

的元素了, 因而得到它的一个有限子覆盖. 易见这个子覆盖的基数不大于 2^nH. 因此

$$H(\alpha\vee\widetilde{f}^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee\widetilde{f}^{-(n-1)}(\alpha))\leqslant 2^nH(h\pi(\alpha)\vee\widetilde{f}^{-1}(h\pi(\alpha))\vee\cdots\vee\widetilde{f}^{-(n-1)}h\pi(\alpha)).$$

按定义

$$\begin{aligned}\operatorname{ent}(\widetilde{f}|_{\overline{P(\widetilde{f})}},\alpha)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log H(\alpha\vee\widetilde{f}^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee\widetilde{f}^{-(n-1)}(\alpha))\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log 2^nH(h\pi(\alpha)\vee\widetilde{f}^{-1}h\pi(\alpha)\vee\cdots\vee\widetilde{f}^{-(n-1)}h\pi(\alpha))\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\log H(h\pi(\alpha)\vee\widetilde{f}^{-1}h\pi(\alpha)\vee\cdots\vee\widetilde{f}^{-(n-1)}h\pi(\alpha))+\log 2^n)\\&=\log 2.\end{aligned}$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 即得

$$\mathrm{ent}(f) = \mathrm{ent}(\widetilde{f}|_{\overline{P(\widetilde{f})}}) \leqslant \log 2.$$

上面的结论对无同宿点的线段自映射均成立. f 无同宿点, $f^m, \forall m > 0$ 也无同宿点, 因此

$$m \cdot \mathrm{ent}(f) = \mathrm{ent}(f^m) \leqslant \log 2, \quad \forall m > 0.$$

所以

$$\mathrm{ent}(f) = 0.$$

至此, 小熵猜测证毕.

定理 2.1.73 设 $f \in C^0(I)$, 则 $\mathrm{ent}(f) > 0 \Leftrightarrow f|_{\Omega(f)}$ 混沌.

我们知道, 混沌和拓扑熵都是刻画动力系统系统复杂程度的概念, 因此就存在一个它们之间强弱比较问题, 即正熵和混沌哪个更强? 因为存在零熵的混沌线段自映射, 从表面上看, 正熵似乎更强. 从纯拓扑观点, 人们已经可以看出, 非游荡集上集中了系统的全部重要动力性状, 游荡集可视为干扰. 去掉干扰, 也就是把混沌集限制在非游荡集上, 情况又如何? 上述定理回答了这个问题. 但以后我们将会看到, 这个结果对一般情形不成立. 这有两种可能, 即正熵真的强过混沌或去掉的干扰还不彻底, 即在非游荡集上还有干扰. 如何彻底去掉干扰? 纯拓扑方法对此无能为力, 需要引进遍历理论方法. 我们以后讨论这个问题.

在定理 2.1.4 后面我们曾说明, 该定理中的不可数混沌集可选择全由非游荡点构成. 据 Sharkovskii 定理 (定理 2.1.1), $\mathrm{ent}(f) > 0$ 蕴涵存在 $m > 0$ 使得 f^m 有周期 3, 因此 f^m 混沌且其混沌集可全由非游荡点构成, 而 f^m 的非游荡集也是 f 的非游荡集. 这给出上述定理必要性的证明. 下面证明定理的充分性的一个等价形式, 即 $\mathrm{ent}(f) = 0$ 蕴涵不存在都是非游荡点的混沌点偶, 因此不存在全由非游荡点构成的混沌集. 注意, $\mathrm{ent}(f) = 0$ 蕴涵 f 无同宿点. 下面设 f 无同宿点.

引理 2.1.74 设 $p, q \in P(f)$, 周期分别为 $2^n, 2^l, n, l \geqslant 0$. 则当 $n \leqslant l - 2$ 时,

$$W^u(p, f^{2^n}) \cap W^u(q, f^{2^l}) \neq \varnothing \Rightarrow W^u(q, f^{2^l}) \subset W^u(p, f^{2^n}).$$

证明 据引理 2.1.7, 有 $f^m(W^u(p, f^{2^n})) = W^u(f^m(p), f^{2^n})$, $f^m(W^u(q, f^{2^l})) = W^u(f^m(q), f^{2^l})$, $\forall m > 0$. 易证, 若 $W^u(p, f^{2^n}) \cap W^u(q, f^{2^l}) \neq \varnothing$, $W^u(q, f^{2^l}) \not\subset W^u(p, f^{2^n})$, 则

$$W^u(f^m(p), f^{2^n}) \cap W^u(f^m(q), f^{2^l}) \neq \varnothing, \quad W^u(f^m(q), f^{2^l}) \not\subset W^u(f^m(p), f^{2^n}), \forall m > 0.$$

再者还易证, 若

$$q \in W^u(p, f^{2^n}) \text{ 或 } q \notin W^u(p, f^{2^n})$$

蕴涵

$$f^{2^n}(q), f^{2^{n+1}}(q) \in W^u(p, f^{2^n}) \text{ 或 } f^{2^n}(q), f^{2^{n+1}}(q) \notin W^u(p, f^{2^n}).$$

由不动点的非稳定流形的连通性, 不难证明, 若引理结论不成立, 则有 $f^m(q) \in W^u(f^k(q), f^{2^l}), m, k = 0, 2^n, 2^{n+1}, m \neq k$, 但这与引理 2.1.33 矛盾. □

引理 2.1.75 设 $0 \leqslant p < q \leqslant 1, (p,q)$ 是 $I - \overline{P(f)}$ 的一个连通分支. 则只有当 $p \in P(f) \cup \{0,1\}, q \in \overline{P(f)} - P(f)$ 或 $q \in P(f) \cup \{0,1\}, p \in \overline{P(f)} - P(f)$ 时, $(p,q) \cap \Omega(f)$ 才能不空, 但至多包含一点.

证明 易见不满足引理条件的 (p,q) 是 (a,b) 型连通分支. $(p,q) \cap \Omega(f) = \varnothing$ 由引理 2.1.62 推出. 至于 $(p,q) \cap \Omega(f) \neq \varnothing$ 时, 其中至多包含一点也易证明, 请读者自己完成. □

引理 2.1.76 $x \in \Omega(f) - P(f) \Rightarrow w(x, f) \subset \overline{P(f)} - P(f)$.

证明 在无同宿点的条件下, 易证 $w(x,f) \cap P(f) = \varnothing$(参见文献 [21]). 因此 $w(x,f) \subset \Omega(f) - P(f)$. 再据引理 2.1.75 ($I - \overline{P(f)}$ 的每一个连通分支至多包含一个非游荡点), 易证 $w(x,f) \subset \overline{P(f)} - P(f)$. □

引理 2.1.77 设 $0 < a_0 < b_0 < 1, (a_0, b_0)$ 是 $I - \overline{P(f)}$ 的一个 (a,b) 型连通分支, 即 a_0, b_0 都属于 $\overline{P(f)} - P(f)$, 则对任意 $n_1 < n_2 < \cdots < n_j < \cdots$, $\lim\limits_{j\to\infty} f^{n_j}(a_0) = \lim\limits_{j\to\infty} f^{n_j}(b_0)$ (即两端极限存在即相等).

证明 如果存在 $m > 0$, 使得 $f^m(a_0) = f^m(b_0)$, 则结论明显. 设这样的 m 不存在. 据引理 2.1.65, 对每一个 $n > 0$, 存在 $I - \overline{P(f)}$ 的 (a,b) 型连通分支 (a_n, b_n), 使得 $f^n([a_0, b_0]) = [a_n, b_n]$, 且当 $n_1 < n_2$ 时, $(a_{n_1}, b_{n_1}) \neq (a_{n_2}, b_{n_2})$.

$I - \overline{P(f)}$ 的 (a,b) 型连通分支至多可数且两两不相交, 故其长度之和不大于 1, 显然

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n[a_0, b_0]) = 0.$$

这明显蕴涵本引理结论. □

定理 2.1.73 充分性的证明 事实上, 设 $x, y \in \Omega(f) - P(f)$ 为不同两点. 分两步证明:

(1) x, y 在 $I - \overline{P(f)}$ 同一个连通分支的闭包内, 则 $\limsup\limits_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$.

设 $0 \leqslant a < b \leqslant 1, (a,b)$ 是 $I - \overline{P(f)}$ 的一个连通分支, $x, y \in [a,b]$. 当 (a,b) 是 $I - \overline{P(f)}$ 的 (a,b) 型连通分支时, 据引理 2.1.75, $(a,b) \cap \Omega(f) = \varnothing$, 故这时 $x = a, y = b$ 或 $x = b, y = a$, 据引理 2.1.77, (1) 成立.

设 (a,b) 不是 $I - \overline{P(f)}$ 的 (a,b) 型连通分支. 据引理 2.1.75, 这时 x, y 有一点是 (a,b) 的内点, 另一点是其一个端点. 不妨设 $x \in (a,b), y = b$. 据推论 2.1.56 和引理 2.1.57 易证, 对充分大的 $N > 0$, 存在 $p \in P(f)$, 其周期为 $2^n \geqslant N$,

使得 $[x,b]\subset W^u(p,f^{2^n})$(当 $a\in P(f)$ 时, 取 N 大于 a 的周期的 4 倍). 因此 $f^m([x,b])\subset f^m(W^u(p,f^{2^n}))=W^u(f^m(p),f^{2^n}),\forall m\geqslant 0$. 因为 p 的周期可以任意大, 据推论 2.1.56, 有 $f^m([x,b])\cap P(f)=\varnothing,\forall m\geqslant 0$.

据引理 2.1.76, 可设

$$n_1<\cdots<n_j<\cdots,\quad \lim_{j\to\infty}f^{n_j}(x)=x_0\in\overline{P(f)}-P(f),$$
$$\lim_{j\to\infty}f^{n_j}(b)=b_0\in\overline{P(f)}-P(f).$$

我们证明 $x_0=b_0$. 不妨设 $x_0<b_0$, 则 $(x_0,b_0)\cap P(f)=\varnothing$(否则与 $f^m([x_0,b_0])\cap P(f)=\varnothing$ 矛盾). 因此 (x_0,b_0) 是 $I-\overline{P(f)}$ 的一个 (a,b) 型连通分支. 据引理 2.1.75, $(x_0,b_0)\cap\Omega(f)=\varnothing$. 故对充分大的 j, 必有 $f^{n_j}(x)<x_0,f^{n_j}(b)>b_0$. 易见

$$[f^{n_j}(x),x_0]\cap P(f)\neq\varnothing,\quad [b_0,f^{n_j}(b)]\cap P(f)\neq\varnothing.$$

于是 $f^{n_j}[x,b]\cap P(f)\supset[f^{n_j}(x),f^{n_j}(b)]\cap P(f)\neq\varnothing$. 这是矛盾的, 因此必有 $x_0=b_0$, 即

$$\limsup_{n\to\infty}|f^n(x)-f^n(y)|=0.$$

(1) 得证.

(2) x,y 不在 $I-\overline{P(f)}$ 的同一个连通分支的闭包内蕴涵 $\liminf\limits_{n\to\infty}|f^nx-f^n(y)|>0$.

不妨设 $x<y,x\in[a_1,b_1],y\in[a_2,b_2]$, 其中 $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ 是 $I-\overline{P(f)}$ 的不同两个连通分支. 显然 $[x,y]\cap P(f)\neq\varnothing$. 设 $q\in P(f)$, 其周期为 2^n.

假设存在 $n_1<n_2<\cdots<n_j<\cdots$, 使得 $\lim\limits_{j\to\infty}f^{n_j}(x)=\lim\limits_{j\to\infty}f^{n_j}(y)=z\in\overline{P(f)}-P(f)$. 据引理 2.1.57, 存在 $p\in P(f)$, 其周期为 2^l(l 可以任意大, 可取 $l>n+2$), 使 $z\in W^u(p,f^{2^l})$. 我们断言, 存在充分大的 j, 使得 $f^{n_j}(x),f^{n_j}(y)\in W^u(p,f^{2^l})$. 当 $z\in W^u(p,f^{2^l})$ 为内点时是明显的. 下设只要 $z\in W^u(p,f^{2^l})$ 就是其一个端点. 易见, 这时任何周期点序列只能从一侧趋于 $z\in\overline{P(f)}-P(f)$, 因为否则 z 可以夹在两个周期可以任意大的周期点之间, 而这两个周期点中有一个作为 f 的某次迭代的不动点的非稳定流形包含这两个周期点之间的区间, 因而 z 成为内点, 与假设矛盾. 不妨设 $z<p$. 由 $z\in W^u(p,f^{2^l})$ 是一个端点可以看出, 存在 $0\leqslant w<z<1$, 使得 (w,z) 是 $I-P(f)$ 的一个连通分支. 据引理 2.1.75, (w,z) 至多包含一个非游荡点. 因为 $f^{n_j}(x),f^{n_j}(y)$ 都是非游荡点, 故对充分大的 j, 必有 $z<f^{n_j}(x)<p,z<f^{n_j}(y)<p$, 因此 $f^{n_j}(x),f^{n_j}(y)\in W^u(p,f^{2^l})$. 断言得证.

据推论 2.1.56 和引理 2.1.57, 存在 $p_1,p_2\in P(f)$, 其周期分别为 $2^{l_1},2^{l_2}$ (l_1,l_2 可以任意大), 使得

$$x\in W^u(p_1,f^{2^{l_1}}),\quad y\in W^u(p_2,f^{2^{l_2}}),\quad \overline{W^u(p_1,f^{2^{l_1}})}\cap\overline{W^u(p_2,f^{2^{l_2}})}=\varnothing$$

(后一式只要 $l_1 > n+2, l_2 > n+2$ 即可, 其中 2^n 是 q 的周期). 当 $l_1 \geqslant l_2 > l+2 > n+4$ 和 j 充分大时, 据引理 2.1.74, 有 $f^{n_j}(W^u(p_1, f^{2^{l_1}}) \cup W^u(p_2, f^{2^{l_2}})) \subset W^u(p, f^{2^l})$, 且当 $2^{l_1} > n_j$ 时,

$$\begin{aligned} x, y \in W^u(p_1, f^{2^{l_1}}) \cup W^u(p_2, f^{2^{l_2}}) &= f^{2^{l_1}-n_j}(f^{n_j}(W^u(p_1, f^{2^{l_1}})) \cup f^{n_j}(W^u(p_2, f^{2^{l_2}}))) \\ &\subset f^{2^{l_1}-n_j}(W^u(p, f^{2^l})) = W^u(f^{2^{l_1}-n_j}(p), f^{2^l}). \end{aligned}$$

因最后一项是连通的, 故有 $[x, y] \subset W^u(f^{2^{l_1}-n_j}(p), f^{2^l})$. 于是

$$q \in [x, y] \cap P(f) \subset W^u(f^{2^{l_1}-n_j}(p), f^{2^l}).$$

但 q 的周期 $2^n < 2^{l-2}$, 这导致与推论 2.1.56 矛盾. 矛盾是由假设 $\lim\limits_{j\to\infty} f^{n_j}(x) = \lim\limits_{j\to\infty} f^{n_j}(y)$ 引起. 因此这种情形不会发生. (2) 得证.

定理 2.1.73 证毕. □

2.2 圆周动力系统

一维连通紧流形只有两类: 一类是带边的闭线段, 一类是不带边的圆周. 因此, 圆周动力系统和线段动力系统有重要联系, 但也有重要不同. 线段是全序集合 (任何两点可以比较大小), 而圆周却不是. 这个重要不同导致圆周自映射和线段自映射的一些重要区别, 例如, 前者可以没有周期点, 而且 Sharkovskii 定理也不完全成立, 它可以有周期大于 2 的周期点但没有 2 周期点. 但圆周以直线为万有复迭空间, 每一个圆周自映射都有直线自映射作为它的提升. 有不动点的圆周自映射的提升有两种可能: 一种是存在长度为 1 的不变线段, 另一种是不存在这种不变线段. 第一种情形的圆周自映射可以归结为线段自映射的讨论, 而第二种情形的圆周自映射是复杂的, 即有正拓扑熵且存在混沌. 无不动点的圆周自映射情况较为复杂, 需另行处理.

2.2.1 圆周自映射的提升

记圆周

$$S^1 = \{e^{2\pi i x} | x \in I\},$$

并定义映射

$$\begin{cases} p : \mathbb{R} \to S^1, \\ p(x) = e^{2\pi i x}. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

这个 p 即是万有复迭映射.

设 $f \in C^0(S^1)$. 存在连续映射 $\widetilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $fp = p\widetilde{f}$, 即下面图表可以交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \mathbb{R} \\ p\downarrow & & p\downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

这个 $\widetilde{f}$ 即是 f 的一个提升. 提升不是唯一的, 但每个提升都有形式: $\widetilde{f_k} = \widetilde{f} + k, k \in \mathbb{Z}$. 又存在 $n \in \mathbb{Z}$, 使得 $\widetilde{f}(x+1) = \widetilde{f}(x) + n$, 这个 n 与提升选取无关, 称作 f 的拓扑度或层数, 记为 $n = \deg(f)$.

记号如上, 则下述性质简单:

(1) 设 $K \subset \mathbb{R}$ 为长度不大于 1 的闭线段, 则 $p|_K : K \to p(K)$ 是同胚, 且 $p(K) \subseteq S^1$.

(2) $\forall n > 0, \widetilde{f^n}$ 是 f^n 的一个提升, 即 $f^n p = p\widetilde{f^n}$ 且 $\deg(f^n) = (\deg(f))^n$.

(3) $F(f) = \bigcup\limits_{k>0} p(F(\widetilde{f_k}))$.

(4) 设 $x \in \mathbb{R}, s = p(x) \in S^1$, 则对任意的 $n > 0$, $s \in F(f^n)$ 当且仅当存在某个 $k \in \mathbb{Z}, x \in F(\widetilde{f_k})$.

(5) $p(F(\widetilde{f_k})) = p(F(\widetilde{f_{k'}})), k = k' \bmod (1-n), n = \deg(f)$.

(6) $p(F(\widetilde{f_k})) \cap p(F(\widetilde{f_{k'}})) = \varnothing, k \neq k' \bmod (1-n), n = \deg(f)$.

若 $F(f) \neq \varnothing$, 可设 $p(0) \in F(f)$, 据 (4), 存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使 $\widetilde{f_k}(0) = 0$, 即 0 是提升 $\widetilde{f_k}$ 的不动点. 等等.

圆周自映射可以按有无周期点分成两类, 也可按拓扑度分成四类, 即

$$|\deg(f)| > 1; \quad \deg(f) = -1; \quad \deg(f) = 0; \quad \deg(f) = 1,$$

其中前三类的映射都有不动点, 而第四类较为复杂, 可以有不动点、没有不动点但有周期点也可以没有周期点[30]. 我们先讨论无周期点的圆周自映射.

2.2.2 无周期点的圆周自映射

下面设 $f \in C^0(S^1)$. 设 $a, b \in S^1$ 为不同两点. 用 $[a,b], (a,b)$ 分别表示按顺时针方向从 a 到 b 的闭、开弧. 设 $x \in S^1$, 有时用 $V(x)$ 表示 x 的开区间, 即包含 x 的开弧. 下述引理简单, 证明从略.

引理 2.2.1 *若存在 $[a,b] \neq S^1$ 和 $n > 0$, 使得 $[a,b] \subset f^n([a,b]) \subsetneq S^1$ 或 $[a,b] \supset f^n([a,b])$, 则*

$$P(f) \neq \varnothing.$$

下面恒设 $f \in C^0(S^1), P(f) = \varnothing$.

利用上面的引理, 易证下述引理, 证明从略.

引理 2.2.2 *设 $x \in S^1$, 存在 $V(x) \subset S^1$, 使得 $f^n(V(x)) \subsetneq S^1, \forall n > 0$.*

引理 2.2.3 *设 $y_1 \neq y_2 \in S^1, f(y_1) = f(y_2) = z$, 则 $z \notin [y_1, y_2] \Rightarrow f^n(z) \notin [y_1, y_2], \forall n \geqslant 0$.*

证明 用反证法, 设结论不成立, 即存在 $n > 1$ 使得 $f^n(y_1) = f^n(y_2) \in [y_1, y_2]$. 适当取 f 的提升 $\widetilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 使得 $x < \widetilde{f}(x) < x + 1$(注意, $\deg(f) = 1$). f 无周期点的假设蕴涵

$$\widetilde{f^k}(x+1) = \widetilde{f^k}(x) + 1, \quad \forall k > 0.$$

可以假设 $0, a, b \in \mathbb{R}$ 分别对应 y_1, y_2, z 且 $\widetilde{f}(0) = \widetilde{f}(a) = b > a$. 注意, 如果对某一个非零整数 k, 有 $\widetilde{f}(a) = \widetilde{f}(0) + k$, 则易见 $y = \widetilde{f}(x)$ 的相图将与直线 $y = x$ 或者 $y = x + 1$ 相交, 这蕴涵 f 有不动点, 与假设矛盾.

设 r 是满足条件 $r < \widetilde{f^m}(0) = \widetilde{f^m}(a) < r+1$ 的正数. 据假设 $f^m(y_1) = f^m(y_2) \in [y_1, y_2]$, 有

$$r < \widetilde{f^m}(0) = \widetilde{f^m}(a) < r + a.$$

于是 $y = \widetilde{f^m}(x)$ 的相图应该与直线相交于某点 x', 即存在 $x' \in [0, a]$ 使得 $\widetilde{f^m}(x') = x' + r$. 如果令 y' 是其在 S^1 上的对应点, 那么 $f^m(y') = y'$, 即 y' 是 f 的不动点. 矛盾, 引理得证. □

推论 2.2.4 *如果 f 是极小的, 则 f 是同胚.*

证明 因为 $\deg(f) = 1$, 故 f 是满映射. 因此只需证明 f 亦是单映射即可. 如果存在 $y_1 \neq y_2 \in S^1$, 使得 $f(y_1) = f(y_2) = z$, 据上面的引理, z 的轨道不与 $[y_1, y_2]$ 相交, 而据极小映射的定义, z 的轨道是稠密的, 显然与极小性矛盾. □

定理 2.2.5 *$\Omega(f) = S^1$ 或者 $\Omega(f)$ 无处稠密.*

证明 设 $\Omega(f) \subsetneq S^1$ 但不是无处稠密. $\Omega(f)$ 包含某个闭线段作为连通分支, 设为 K. 取内点 $x \in K$ 和邻域 $V(x) \subset K$. 据非游荡点的定义, 存在 $m > 0$, 使得

$$f^m(K) \cap K \supset f^m(V(x)) \cap V(x) \neq \varnothing.$$

因为 $\Omega(f)$ 对 f^m 不变, 据连通分支的性质, 有 $f^m(K) \subset K$, 而这明显蕴涵 f^m 在 K 上有不动点, 与 $P(f) = \varnothing$ 矛盾. 证毕. □

设 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是 S^1 上不同 $k > 2$ 个点, 当

$$(x_1, x_2), (x_2, x_3), \cdots, (x_k, x_1)$$

两两不相交时, 记作 $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$. 这种表示本质上是唯一的.

设 $E \subset S^1$ 为任意子集. 又设 E 中三点 $x_1 < x_2 < x_3$ 满足 $f([x_1, x_3]) \subsetneq S^1$. 显然

$$[f(x_1), f(x_3)] \subset f([x_1, x_3])$$

和

$$[f(x_3), f(x_1)] \subset f([x_1, x_3])$$

只有一式成立.

定义 2.2.6　称 $f(x_2)$ 介于 $f(x_1)$ 和 $f(x_3)$ 之间, 如果当 $[f(x_1), f(x_3)] \subset f([x_1, x_3])$ 时, $f(x_2) \in [f(x_1), f(x_3)]$, 而当 $[f(x_3), f(x_1)] \subset f([x_1, x_3])$ 时, $f(x_2) \in [f(x_3), f(x_1)]$.

如果对任意满足上述条件的 E 中三点 $x_1 < x_2 < x_3$, 都有 $f(x_2)$ 在 $f(x_1)$ 和 $f(x_3)$ 之间, 则称 E 在 f 作用下保序.

利用引理 2.2.3 可以直接证明下述引理, 证明从略.

引理 2.2.7　设 $q \in S^1, V(q) \subsetneqq S^1$ 满足 $f^n(V(q)) \subsetneqq S^1, \forall n \geqslant 0$. 又设 $x, y, z \in \Omega(f) \cap V(q)$ 且 y 介于 x, z 之间, 则对任意的 $m > 0, f^m(y)$ 介于 $f^m(x)$ 和 $f^m(z)$ 之间.

设 $\Omega(f)$ 无处稠密, 显然 $S^1 - \Omega(f)$ 处处稠密, 且其每一个连通分支都是开弧, 故可以写成

$$S^1 - \Omega(f) = \bigcup_{i=1} (a_i, b_i).$$

引理 2.2.8　$f|_{\Omega(f)} : \Omega(f) \to \Omega(f)$ 最多是 2 对 1 的.

证明　$f|_{\Omega(f)}$ 可能把某些 (a_i, b_i) 的端点映成一点, 余者均为 1 对 1 的.　□

定理 2.2.9　$\mathrm{ent}(f) = 0$.

证明　如果 $\Omega(f) = S^1$, 则 f 是同胚, 这时结论成立 (利用拓扑熵的 Bowen 定义不难加以证明, 读者可参见文献 [50] 的定理 7.1.4).

下面设 $S^1 - \Omega(f) = \bigcup\limits_{i=1} (a_i, b_i)$. 设 $\varepsilon > 0$ 且 (a_i, b_i) 中长度 (弧长) 不大于 ε 的只有

$$(a_1, b_1), \cdots, (a_k, b_k).$$

任取 $\Omega(f)$ 关于 $f|_{\Omega(f)}$ 的一个 $(\varepsilon, 0)$ 生成集 X, 使得 X 包含 $a_i, b_i, i = 1, 2, \cdots, k$, 并设 X 的基数为 $N > 0$. 容易证明

$$X_1 = (X \cup f^{-1}(X)) \cap \Omega(f)$$

为 $\Omega(f)$ 关于 $f|_{\Omega(f)}$ 的 $(\varepsilon, 1)$ 的生成集, 其基数不大于 $3N$. 可以归纳证明,

$$X_n = (X_1 \cup f^{-1}(X) \cup \cdots \cup f^{-n}(X)) \cap \Omega(f)$$

是 $\Omega(f)$ 关于 $f|_{\Omega(f)}$ 的 $(\varepsilon, n)(n > 0)$ 的生成集, 其基数不大于 $(2n+1)N$. 于是有

$$h(f|_{\Omega(f)}, \varepsilon) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r(\varepsilon, n) \leqslant \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log(2n+1)N = 0.$$

因此 $\mathrm{ent}(f) = 0$.　□

定理 2.2.10 $f|_{\Omega(f)}$ 不是混沌的.

证明 当 $\Omega(f)=S^1$ 时, f 为同胚, 拓扑共轭一个无理旋转[58], 故不可能混沌. 下设 $\Omega(f)\subsetneqq S^1$. 设 $x,y\in\Omega(f)$. 当它们属于 $S^1-\Omega(f)$ 的同一个连通分支的闭包时, 易于证明

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x),f^n(y))=0.$$

否则 $\liminf\limits_{n\to\infty} d(f^n(x),f^n(y))>0$. 显然 $f|_{\Omega(f)}$ 也不是混沌的. □

关于无周期点的圆周自映射, 从非游荡集结构、拓扑熵估计和是否存在混沌角度看, 它们是简单的, 上述讨论也算完整. 关于这类映射就讨论到这里, 有兴趣读者可以参阅有关文献.

2.2.3 有周期点的圆周自映射

设 $f\in C^0(S^1), P(f)\neq\varnothing$. 不失普遍性, 可设 $F(f)\neq\varnothing$, 因为 $P(f)\neq\varnothing$ 蕴涵存在 $n>0$, 使 $F(f^n)\neq\varnothing$, 而 f^n 和 f 在下述讨论中无本质区别.

适当选取 f 的提升 $\widetilde{f}$, 并不失普遍性, 可设 $\widetilde{f}(0)=0$, 即 0 是 $\widetilde{f}$ 的不动点. 类似线段动力系统, 可以定义 $\widetilde{f}$ 的非稳定流形

$$W^u(p,\widetilde{f}),\quad W^u(p,\widetilde{f},\pm),\quad p\in P(\widetilde{f})$$

和同宿点. 下面两个性质简单:

(1) $W^u(p,\widetilde{f}), W^u(p,\widetilde{f},\pm)$ 都是包含 p 连通集合, 但可能无界, 且均对 $\widetilde{f}$ 不变.

(2) 设 $p<q$ 是 $\widetilde{f}$ 相邻的两个不动点, 则当 $\widetilde{f}(x)>x,\forall x\in(p,q)$ 时,

$$[p,q]\subset W^u(p,\widetilde{f},+);$$

当 $\widetilde{f}(x)<x,\forall x\in(p,q)$ 时,

$$[p,q]\subset W^u(q,\widetilde{f},-).$$

按同样方式定义同宿点, 但这里同宿点的作用弱于线段自映射的情形. 亦可按同样方式定义马蹄效应, 即

定义 2.2.11 设 $a<b\leqslant c<d, n>0$. 若

$$\widetilde{f^n}([a,b])\cap\widetilde{f^n}([c,d])\supset[a,d],$$

则称 $\widetilde{f^n}$ 有马蹄效应.

亦可对 f 定义马蹄效应.

定理 2.2.12 对某个 $n>0$, 则 $\widetilde{f^n}$ 有马蹄效应蕴涵 $\widetilde{f}$ 是混沌的.

证明与线段情形无本质区别, 参见文献 [34].

推论 2.2.13 $\widetilde{f}$ 混沌蕴涵 f 混沌.

证明 易见存在长度不大于 1 的线段, 包含 $\widetilde{f}$ 的不可数混沌集的一个不可数子集, 这个不可数子集经万有复迭映射投影到 S^1 上是 f 的混沌集. □

定理 2.2.14 设 $f \in C^0(S^1)$, 则 $\overline{P(f)} = P(f) \Rightarrow |\deg(f)| \leqslant 1$.

证明 用反证法, 设 $\overline{P(f)} = P(f)$ 但 $|\deg(f)| \geqslant 2$.

不失普遍性, 可设 $\deg(f) > 1$, 否则用 f^2 代替 f 下面证明不受影响. 有 $F(f) \neq \varnothing$(不难直接证明, 可参见文献 [12]). 不妨设 $p(0) \in F(f)$, 且可选取提升 $\widetilde{f}, \widetilde{f}(0) = 0$.

因为 $\deg(f) \geqslant 2$, 故 $\widetilde{f}(1) = \widetilde{f}(0) + \deg(f) \geqslant 2$, 即 1 不是 $\widetilde{f}$ 的不动点. 记

$$x_0 = \sup_{0 \leqslant x < 1} \{x | \widetilde{f}(x) = x\},$$

显然 x_0 是存在的, 且

$$\widetilde{f}(x_0) = x_0, \quad 0 \leqslant x_0 < 1, \quad \widetilde{f}(x) > x, \quad \forall x \in (x_0, 1).$$

由 $\widetilde{f}(x_0) = x_0 < 1, \widetilde{f}(1) \geqslant 2$, 据中值定理, 存在 $y \in (x_0, 1)$, 使 $\widetilde{f}(y) = x_0 + 1 < 2$. 记

$$y_0 = \sup_{x_0 < y < 1} \{y | \widetilde{f}(y) = x_0 + 1\},$$

易见, y_0 存在, 且 $\widetilde{f}(y_0) = x_0 + 1, x_0 < y_0 < 1, y_0 \neq \widetilde{f}(y_0)$.

我们断言, $p(y_0)$ 不是 f 的周期点, 即 $p(y_0) \notin P(f)$, 证明如下.

反证法, 设 $f^n(p(y_0)) = p(y_0), n \geqslant 1$. 据提升的性质, 存在整数 k, 使 y_0 是 $\widetilde{f^n}$ 的不动点, 即 $\widetilde{f^n}(y_0) + k = y_0$. 由 $\widetilde{f}(y_0) = x_0 + 1$, 利用

$$\widetilde{f}(x_0 + 1) = \widetilde{f}(x_0) + \deg(f) = x_0 + \deg(f),$$

易于归纳证明 $\widetilde{f}^n(y_0) = x_0 + m, m$ 是某个整数. 因此

$$y_0 = \widetilde{f^n}(y_0) + k = x_0 + m + k,$$

因而 $y_0 - x_0 = m + k$. 由 $0 \leqslant x_0 < y_0 < 1$, 有 $0 < y_0 - x_0 < 1$, 而 $m + k$ 为整数或零, 这不可能. 断言得证.

由 $\overline{P(f)} = P(f)$, 而 $p(y_0) \notin P(f)$, 故存在 $p(y_0)$ 的连通邻域 $V(p(y_0))$, 使得

$$\overline{V(p(y_0))} \cap P(f) = \varnothing.$$

显然, 存在 y_0 的连通邻域 $V(y_0) \subset (0, 1)$, 使 $p(V(y_0)) = V(p(y_0))$. 记 $V_+(y_0) = V(y_0) \cap [y_0, \infty)$, 并称其为 y_0 的右半邻域 (下同). 易见 $[x_0, y_0] \cup V_+(y_0) \subset [x_0, 1]$. 必要时缩小 $V(p(y_0))$, 使

$$[x_0, y_0] \cup \overline{V_+(y_0)} \subset [x_0, 1].$$

从 y_0 的取法可以看出, $\widetilde{f}(V_+(y_0))$ 包含 x_0+1 的某个右半邻域:

$$V_+(x_0+1)=[x_0+1,x_0+1+\delta),\quad \delta>0,$$

且

$$\widetilde{f}(V_+(y_0))\cap(-\infty,x_0+1)=\varnothing.$$

必要时缩小 δ, 可设

$$[x_0,y_0]\cup\overline{V_+(y_0)}\not\subset[x_0,x_0+\delta]\subset[x_0,1).$$

由

$$\widetilde{f}(x)>x,\quad \forall x\in(x_0,1),$$

可以证明存在正整数 n, 使

$$[x_0,y_0]\cup\overline{V_+(y_0)}\subset\widetilde{f^n}([x_0,x_0+\delta]),$$

但

$$[x_0,y_0]\cup\overline{V_+(y_0)}\not\subset\widetilde{f}^i([x_0,x_0+\delta]),\quad i=0,1,\cdots,n-1,$$

因此

$$\widetilde{f}^i([x_0,x_0+\delta])\subset[x_0,1),\quad i=0,1,\cdots,n-1.$$

由此有

$$\widetilde{f}^n(x)>\widetilde{f}^{n-1}(x)>\cdots>x>x_0,\quad \forall x\in(x_0,x_0+\delta].$$

下面证明, 存在 $\delta'>0,\delta'\leqslant\delta$ 使

$$[x_0,y_0]\cup\overline{V_+(y_0)}\subset\widetilde{f}^n([x_0,x_0+\delta'])\subset[x_0,1).$$

对 $t\in(x_0,x_0+\delta]$, 记

$$M_t=\sup_{x\in[x_0,t]}\{\widetilde{f}^n(x)\}\geqslant x_0.$$

注意到

$$\inf_{x\in[x_0,t]}\{\widetilde{f}^n(x)\}=x_0,\quad \forall t\in(x_0,x_0+\delta],$$

容易看出

$$\widetilde{f}^n([x_0,t])=[x_0,M_t],\quad \forall t\in(x_0,x_0+\delta].$$

显然 M_t 是 t 的连续不减函数. 由

$$\widetilde{f}^n(x_0)=x_0,\quad [x_0,y_0]\cup\overline{V_+(y_0)}\subset\widetilde{f}^n([x_0,x_0+\delta]),$$

据中值定理, 存在 $t' \in (x_0, x_0+\delta]$, 使

$$[x_0, y_0] \cup \overline{V_+(y_0)} \subset \widetilde{f}^n([x_0, t']) = [x_0, M_{t'}] \subset [x_0, 1).$$

取 $\delta' = t' - x_0 \leqslant \delta$ 即可. 显然 $\delta' > 0$.

由

$$[x_0+1, x_0+1+\delta') \subset [x_0+1, x_0+1+\delta) = V_+(x_0+1) \subset \widetilde{f}^n(V_+(y_0)),$$

易见, $\widetilde{f}$ 在 $\overline{V_+(y_0)}$ 上的最大值不小于 $x_0+1+\delta'$. 因为 $\widetilde{f}(y_0) = x_0+1$, 据中值定理, 存在 $t \in \overline{V_+(y_0)}$, 使 $\widetilde{f}(t) = x_0+1+\delta'$. 记

$$t_0 = \inf_{t \in V_+(y_0)} \{t | \widetilde{f}(t) = x_0+1+\delta'\}.$$

易见 $t_0 > y_0, \widetilde{f}(t_0) = x_0+1+\delta', \widetilde{f}([y_0, t_0]) = [x_0+1, x_0+1+\delta']$, 显然 $[y_0, t_0] \subset \overline{V_+(y_0)}$. 因为

$$[x_0, y_0] \cup [y_0, t_0] \subset [x_0, y_0] \cup \overline{V_+(y_0)} \subset \widetilde{f^n}([x_0, x_0+\delta']) \subsetneqq [x_0, 1] \subset [0, 1),$$

据万有复迭映射性质, 有

$$p([y_0, t_0]) \subset p\widetilde{f}^n([x_0, x_0+\delta']) \subsetneqq S^1.$$

另一方面, 易见还有

$$\begin{aligned} f^{n+1}p([y_0, t_0]) =& p\widetilde{f}^{n+1}([y_0, t_0]) = p\widetilde{f}^n(\widetilde{f}([y_0, t_0])) \\ =& p\widetilde{f}^n([x_0+1, x_0+1+\delta']) = p\widetilde{f}^n([x_0, x_0+\delta']). \end{aligned}$$

因此

$$p([y_0, t_0]) \subset f^{n+1}p([y_0, t_0]) \subsetneqq S^1.$$

易见, f^{n+1} 在 $p([y_0, t_0])$ 上有不动点, 即 $p([y_0, t_0]) \cap P(f) \neq \varnothing$. 但

$$p([y_0, t_0]) \subset p(\overline{V_+(y_0)}) = V(\overline{p(y_0)}).$$

依前面假设 $\overline{V(p(y_0))} \cap P(f) = \varnothing$ 矛盾. 矛盾由假设 $|\deg(f)| \geqslant 2$ 引起, 故 $|\deg(f)| \leqslant 1$. 证毕. □

定理 2.2.15　设 $f \in C^0(S^1), |\deg(f)| \geqslant 2$, 则下述 (i) 至 (iv) 成立:

(i) $p(f) \subsetneqq \{2^n, n \geqslant 0\}$;

(ii) $\overline{P(f)} \neq P(f)$;

(iii) $\Omega(f) \neq P(f)$;

(iv) $\mathrm{ent}(f) > 0$.

证明 文献 [12] 证明, 在假设条件下, $p(f)$ 包含除 2 外的全部整数和 $\mathrm{ent}(f) \geqslant \log|\deg(f)|$, 故 (i), (iv) 成立. (ii) 是上定理的明显推论. (iii) 是 (ii) 的直接推论, 因为 $\Omega(f)$ 是闭集. □

关于圆周动力系统就讨论到这里, 有兴趣的读者可进一步参见有关文献.

第 3 章　符号动力系统

取有限个符号构成的符号空间作底空间, 并专门讨论其上的转移自映射, 就是所谓的符号动力系统. 符号动力系统是特殊的动力系统, 具有丰富的内容, 理论意义和应用意义均属重大. 特别是它在一般动力系统研究中是一个不能替代的工具. 众所周知, 混沌和分形是 20 世纪两项跨学科重大发现. 我们知道 Smale 马蹄几乎是复杂系统和混沌的代名词, 那是因为 Smale 马蹄蕴涵符号动力系统所致, 符号动力系统具有典型的复杂动力性状, 人们往往通过与符号动力系统是否拓扑 (半) 共轭来研究一般动力系统是否是复杂的. 至于在分形的研究中, 符号动力系统也是一个不可或缺的工具. 另外, 在数学理论研究中, 正确的命题是需要证明的, 而不正确的命题只要举一个反例就够了. 我们将会看到, 符号动力系统又是一个几乎不能替代的举反例的工具. 举凡动力系统和分形几何的著作, 没有不设专章讨论符号动力系统的. 本书亦不能例外. 本章专门讨论符号动力系统.

3.1　符号空间和转移自映射

3.1.1　符号空间和转移自映射

取 $k>0$ 个不同符号 $S=\{0,1,\cdots,k-1\}$ 并赋以离散拓扑, 即每个元素都是开集, 因此也是闭的, 这是一个紧致空间, 称作状态空间. 作拓扑积

$$\begin{aligned} S^{\mathbb{Z}_+} &= \prod_{n=0}^{\infty} S = S\times S\times\cdots \\ &= \{x=(x_0x_1\cdots)|x_n\in S, \forall n\geqslant 0\}, \end{aligned}$$

这里的 $\mathbb{Z}_+$ 表全体非负整数. 据吉洪诺夫定理, $S^{\mathbb{Z}_+}$ 是紧致的.

设 $a_i\in S,\ i=0,1,\cdots,n-1,m\geqslant 0$. 记

$$_m[a_0\cdots a_{n-1}]=\{x\in S^{\mathbb{Z}_+}|x_{m+1}=a_i, i=0,1,\cdots,n-1\},$$

叫做 S 上有限序列上的长度为 n 的柱形. 柱形是开的, 也是闭的. 全体柱形的集合是可数的, 构成 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 的拓扑的一组基, 即每一开集是柱形的并集. 因此 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 满足第二可数性公设. 又易见, $S^{\mathbb{Z}_+}$ 是 Hausdorff 空间, 即不同两点有不相交的邻域. 因此

$S^{\mathbb{Z}_+}$ 是可度量化的. 它的一个常用度量是

$$\rho(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta(x_n,y_n)}{2^n},\quad \forall x=(x_0x_1\cdots),\ y=(y_0y_1\cdots)\in S^{\mathbb{Z}_+},$$

其中

$$\delta(x_n,y_n)=\begin{cases}0, & x_n=y_n,\\ 1, & x_n\neq y_n,\forall n\geqslant 0.\end{cases}$$

下述等价度量亦常用到:

$$\rho_1(x,y)=\max_n\left\{\frac{1}{n+1}|x_n\neq y_n,\forall x,y\in S^{\mathbb{Z}_+}\right\}.$$

由有限 k 个符号 (状态) 生成的紧致全不连通的可度量空间 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 或 Σ_k 叫做 k 单边符号空间. 类似地, 可以定义双边符号空间, 因本书用得不多, 这里不去详谈, 读者可参阅文献 [57].

在 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 上定义

$$\begin{cases}\sigma: S^{\mathbb{Z}_+}\to S^{\mathbb{Z}_+},\\ (x_0x_1\cdots)\mapsto(x_1x_2\cdots).\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\sigma: \Sigma_k\to \Sigma_k,\\ (x_0x_1\cdots)\mapsto(x_1x_2\cdots).\end{cases}\tag{3.1.1}$$

即在 σ 的作用下, 点的坐标依次向左移一位, 第 0 个坐标抹去. 这个映射叫做转移自映射.

命题 3.1.1 σ 是 k 对 1、在上、连续的.

证明从略.

所谓单边符号动力系统即是指 $(S^{\mathbb{Z}_+},\sigma)$. 下面是这个动力系统的主要动力性状, 它们有重要应用.

命题 3.1.2 $p(\sigma)=\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ 表示正整数的集合.

证明 设 $n>1$. 记

$$O_1=\overbrace{(1,0,\cdots,0)}^{n}.$$

易见

$$x=(O_1O_1\cdots)$$

是 σ 的 n 周期点. □

命题 3.1.3 $\overline{P(\sigma)}=S^{\mathbb{Z}_+}$, 即 σ 的周期点是稠密的.

证明　设 $x=(x_0x_1\cdots)\notin P(\sigma)$. 记 $z_n=(x_0x_1\cdots x_{n-1})$. 显然 $(z_nz_n\cdots)\in P(\sigma)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=x$. □

命题 3.1.4　*σ 是拓扑传递的, 即存在 $x\in S^{\mathbb{Z}_+}$ 使得 $\overline{\mathrm{orb}(x)}=S^{\mathbb{Z}_+}$.*

证明　S 中 k 个符号每次取 $n>0$ 个的排列总数为 k^n. 把这 k^n 个排列按任意顺序排列成 $n\cdot k^n$ 序列, 这样的不同序列共有 $k^n!$ 个, 任取一个记作 $P_{n\cdot k^n}$. 令

$$x=P_kP_{2\cdot k^2}\cdots P_{n\cdot k^n}\cdots\in S^{\mathbb{Z}_+}.$$

下面证明 $\overline{\mathrm{orb}(x)}=S^{\mathbb{Z}_+}$.

任取 $y\in S^{\mathbb{Z}_+}$. 对任意的 $n>0$, 根据 x 的构造, 易见存在 $l_n\geqslant 1$ 使得 $\sigma^{l_n}(x)$ 的前 n 个坐标依次与 $(y_0y_1\cdots y_{n-1})$ 相等, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\sigma^{l_n}(x)=y.$$ □

推论 3.1.5　$\Omega(\sigma)=\overline{P(\sigma)}=S^{\mathbb{Z}_+}$.

证明从略.

命题 3.1.6　*σ 是拓扑弱混合的, 即*

$$\sigma\times\sigma:S^{\mathbb{Z}_+}\times S^{\mathbb{Z}_+}\to S^{\mathbb{Z}_+}\times S^{\mathbb{Z}_+}$$

是拓扑传递的.

证明　我们证明, 存在 $(u,v)\in S^{\mathbb{Z}_+}\times S^{\mathbb{Z}_+}$, 对任意的 $(x,y)\in S^{\mathbb{Z}_+}\times S^{\mathbb{Z}_+}$, 存在单调递升的序列 l_n 满足

$$\lim_{n\to\infty}(\sigma\times\sigma)^{l_n}(u,v)=(x,y),$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sigma^{l_n}(u)=x,\quad \lim_{n\to\infty}\sigma^{l_n}(v)=y.$$

设 $n>0, P_{n\cdot k^n}$ 同上命题. 把 $k^n!$ 个 $n\cdot k^n$ 序列按任意顺序依次排成一行而得到一个 $k^n!\cdot n\cdot k^n$ 序列, 记作 $Q_{k^n!n\cdot k^n}$. 又记 $k^n!$ 个 $P_{n\cdot k^n}$ 依次排成一行而得到的 $k^n!\cdot n\cdot k^n$ 序列为 $P_{k^n!\cdot n\cdot k^n}$.

记

$$u=Q_{k!\cdot k}Q_{k^2!\cdot 2\cdot k^2}\cdots Q_{k^n!\cdot n\cdot k^n}\cdots\in S^{\mathbb{Z}_+},$$

$$v=P_{k!\cdot k}P_{k^2!\cdot 2\cdot k^2}\cdots P_{k^n!\cdot n\cdot k^n}\cdots\in S^{\mathbb{Z}_+}.$$

由上述构造易见, 对任意的 $n>0$, 存在 $l_n\geqslant 0$, 使得 $\sigma^{l_n}(u)$, $\sigma^{l_n}(v)$ 的坐标分别与 $(x_0x_1\cdots x_{n-1})$, $(y_0y_1\cdots y_{n-1})$ 对应相等. 这证明

$$\lim_{n\to\infty}\sigma^{l_n}(u)=x,\quad \lim_{n\to\infty}\sigma^{l_n}(v)=y.$$ □

命题 3.1.7 σ 是拓扑强混合的, 即对任意非空开集 $U,V\subset S^{\mathbb{Z}_+}$, 存在 $N>0$, 使得

$$\sigma^n(U)\cap V\neq\varnothing,\quad \forall n>N.$$

证明 设 $x\in S^{\mathbb{Z}_+}$. 由拓扑基的性质, 存在 $N>0$, 使得 ${}_0[x_0x_1\cdots x_{N-1}]\subset U$. 易见

$$\sigma^n({}_0[x_0x_1\cdots x_{N-1}])=S^{\mathbb{Z}_+},$$

从而

$$\sigma^n(U)\cap V\supset\sigma^n({}_0[x_0x_1\cdots x_{N-1}])\cap V=S^{\mathbb{Z}_+}\cap V\neq\varnothing,\quad \forall n>N.$$ □

我们知道, 拓扑强混合蕴涵拓扑弱混合蕴涵拓扑传递, 所以只需证明命题 3.1.7 即可, 前面两命题可以省略. 我们给出它们的独立证明, 是希望借此使读者对符号动力系统有较深感性认识. 从有限序列出发构造 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 中的点满足所需要的性质, 是常用手法, 以后还会被用到.

命题 3.1.8 设 σ 是 $k>1$ 个符号空间上的转移自映射, 则 $\mathrm{ent}(\sigma)=\log k$.

证明 下面用拓扑熵的 Bowen 定义, 并利用度量 ρ_1 进行证明.

设 $0<s<1, m>0$ 是最小的正整数, 使得 $s\geqslant\dfrac{1}{m}$. 因此

$$\rho_1(x,y)\leqslant s\Leftrightarrow x_i=y_i, i=0,1,\cdots,m-1,\forall x,y\in S^{\mathbb{Z}_+}.$$

记

$$S_{m,n}=\{P=(a_0a_1\cdots a_{m+n-1})|a_i\in S, i=0,\cdots,m+n-1\},$$
$$P_{m,n}=\{PP\cdots\in S^{\mathbb{Z}_+}|P\in S_{m,n}\}.$$

易见基数 $\sharp(S_{m,n})=\sharp(P_{m,n})=k^{m+n}$.

设 $x\in S^{\mathbb{Z}_+}$, 并取 $y\in P_{m,n}$, 使得 $y_i=x_i, i=0,1,\cdots,m+n-1$. 显然

$$\rho_1(\sigma^i(x),\sigma^i(y))\leqslant s,\quad i=0,1,\cdots,n-1.$$

据张成集的定义, $P_{m,n}$ 是 σ 的一个 (n,s) 张成集. 据定义, 有

$$r_n(s,S^{\mathbb{Z}_+},\sigma)\leqslant k^{m+n},\quad \forall n\geqslant 0.$$

因此, 据定义

$$\begin{aligned}\mathrm{ent}(\sigma)&=\lim_{s\to0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r_n(s,S^{\mathbb{Z}_+},\sigma)\\&\leqslant\lim_{s\to0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log k^{m+n}\\&=\log k.\end{aligned}$$

又记

$$S_n = \{P = (a_0a_1 \cdots a_{n-1}) | a_i \in S, i = 0, 1, \cdots, n-1\};$$

$$P_n = \{PP \cdots \in S^{\mathbb{Z}_+} | P \in S_n\}.$$

显然

$$\sharp(S_n) = \sharp(P_n) = k^n, \quad \forall n > 0.$$

设 $x, y \in P_n, x \neq y$. 据上述构造, 易见对某个 $0 \leqslant i < n$,

$$\rho_1(\sigma^i(x), \sigma^i(y)) \geqslant 1 \geqslant s.$$

据分离集的定义, P_n 是 σ 的一个 (n, s) 分离集. 据定义

$$s_n(s, S^{\mathbb{Z}_+}, \sigma) \geqslant k^n, \quad \forall n > 0.$$

据定义

$$\begin{aligned}
\mathrm{ent}(\sigma) &= \lim_{s \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s_n(s, S^{\mathbb{Z}_+}, \sigma) \\
&\geqslant \lim_{s \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log k^n \\
&= \log k.
\end{aligned}$$

□

3.1.2　混沌性状

我们已经证明了符号动力系统是强混合的、有正拓扑熵等. 本节证明它也是混沌的 (在 Li-Yorke 意义下, 下同) . 不失普遍性, 下面只讨论 $k = 2$ 的情形, 即讨论由两个符号构成的符号动力系统.

记

$$S_0^{\mathbb{Z}_+} = \{x \in S^{\mathbb{Z}_+} | x_0 = 0\}; \quad S_1^{\mathbb{Z}_+} = \{x \in S^{\mathbb{Z}_+} | x_0 = 1\},$$

它们是 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 的不相交闭子集, 且

$$\rho(S_0^{\mathbb{Z}_+}, S_1^{\mathbb{Z}_+}) = 1, \quad S_0^{\mathbb{Z}_+} \cup S_1^{\mathbb{Z}_+} = S^{\mathbb{Z}_+}, \quad \sigma(S_i^{\mathbb{Z}_+}) = S^{\mathbb{Z}_+}, \quad i = 0, 1.$$

令 $M = \{E_l\}_{l=0}^{\infty}$ 为 $\{S_0^{\mathbb{Z}_+}, S_1^{\mathbb{Z}_+}\}$ 上的集合序列. 记全体这样的序列为 $\mathscr{E}$.

引理 3.1.9　*对每一个 $M = \{E_l\} \in \mathscr{E}$, 存在唯一 $x \in S^{\mathbb{Z}_+}$, 使得 $\sigma^l(x) \in E_l$, $\forall l > 0$.*

证明　令

$$x_l = \begin{cases} 0, & \text{当 } E_l = S_0^{\mathbb{Z}_+} \text{时}, \\ 1, & \text{当 } E_l = S_1^{\mathbb{Z}_+} \text{时}, \forall l \geqslant 0. \end{cases}$$

显然, $x=(x_0x_1\cdots)\in S^{\mathbb{Z}_+}$ 满足引理要求且唯一. □

设 $M=\{E_l\}\in\mathscr{E}$. 记

$$r(M,l)=\sharp(\{i|E_i=S_0^{\mathbb{Z}_+},i=0,1,\cdots,l\}).$$

引理 3.1.10 *设实数 $\eta\in(0,1)$. 则存在 $M^\eta=\{E_l\}\in\mathscr{E}$, 使得*

$$\lim_{l\to\infty}\frac{r(M^\eta,l^2)}{l}=\eta.$$

证明 用归纳法构造 $M^\eta=\{E_l^\eta\}$. 设 $l_0>0$ 是使 $[l_0\eta]=1$ 的最小正整数. 定义

$$M_{l_0^2}^\eta=\{E_0^\eta,\cdots,E_{l_0^2}^\eta\},$$

其中

$$\begin{cases}E_i^\eta=S_0^{\mathbb{Z}_+}, & \text{当 } 0\leqslant i<l_0^2 \text{ 时},\\ E_{l_0^2}^\eta=S_1^{\mathbb{Z}_+}.\end{cases}$$

对 $l>l_0$, 归纳定义

$$M_{l_0^2}^\eta=\{E_0^\eta,\cdots,E_{l^2}^\eta\},$$

其中

$$\{E_0^\eta,\cdots,E_{(l-1)^2}^\eta\}=M_{(l-1)^2}^\eta,$$

$$E_i^\eta=S_0^{\mathbb{Z}_+},\quad (l-1)^2<i<l^2,$$

和

$$E_{l^2}^\eta=\begin{cases}S_0^{\mathbb{Z}_+}, & \text{当 } [l\eta]-[(l-1)\eta]=1 \text{ 时},\\ S_1^{\mathbb{Z}_+}, & \text{当 } [l\eta]-[(l-1)\eta]=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

归纳步骤完成, 得到 $M^\eta=\{E_l^\eta\}\in\mathscr{E}$.

据上述构造, 易于归纳证明

$$r(M^\eta,l^2)=[l\eta],\quad \forall l>0$$

和

$$\lim_{l\to\infty}\frac{r(M^\eta,l^2)}{l}=\eta.$$

□

设 $M^\eta\in\mathscr{E}$ 满足引理 3.1.10 的要求, 记与它对应满足引理 3.1.9 条件的唯一的点为

$$x^\eta=(x_0^\eta x_1^\eta\cdots)\in S^{\mathbb{Z}_+}.$$

又记

$$C_0 = \{x^\eta \in S^{\mathbb{Z}_+} | \eta \in (0,1)\}, \quad C = \bigcup_{i=0}^{\infty} \sigma^i(C_0).$$

我们先证明下述诸简单断言, 其中 $0 < \eta \leqslant \theta < 1$.

(1) $x_i^\eta = 0 \Leftrightarrow$ 存在 $l > 0$, 使得

$$i = l^2, \quad [l\eta] - [(l-1)\eta] = 1, \quad x_{l^2+j}^\eta = 1, \quad 0 < j < 2l+1, \quad \forall l > 0.$$

这个断言易由 M^η 的构造和 x^η 的性质 (引理 3.1.9) 直接看出.

(2) 存在无限多整数 $l > 0$, 使得 $x_{l^2}^\eta = 0$. 否则, 由 M^η 的构造易于看出 $r(M^\eta, l^2)$ 有界, 因而导致 $\eta = 0$ 的矛盾.

(3) 对任意 $N > 0$, 存在 $l > N$, 使得 $x_{l^2}^\theta \neq x_{l^2}^\eta$. 否则, 易看出 $r(M^\eta, l^2) - r(M^\theta, l^2)$ 有界, 导致 $\eta = \theta$ 的矛盾.

(4) 记

$$e = (11\cdots) \in S^{\mathbb{Z}_+}, \quad e_i = (\overbrace{11\cdots 10}^{i} 11\cdots) \in S^{\mathbb{Z}_+}, \quad \forall i > 0,$$

则有

$$\omega(x, \sigma) = \{e, e_i | \forall i > 0\}, \quad \forall x \in C.$$

因为

$$\omega(x, \sigma) = \omega(\sigma^i(x), \sigma), \quad \forall x \in S^{\mathbb{Z}_+}, \forall i > 0,$$

故只需对 $x \in C_0$ 加以验证即可.

设 $x^\eta \in C_0$. 据 (1), 易见

$$\rho(\sigma^{l^2+1}(x^\eta), e) \to 0 \quad (\text{当 } l \to \infty \text{ 时}),$$

故 $e \in \omega(x^\eta, \sigma)$.

又据 (2), 存在

$$l_1 < l_2 < \cdots < l_j < \cdots,$$

使得 $\sigma^{l_i^2}(x^\eta)$ 的第一个坐标为 $0, \forall j > 0$. 据 (1) 可以看出, 对任意 $i > 0$, 当 j 充分大时, $\sigma^{l_j^2-i}(x^\eta)$ 的前 i 个坐标都是 1, 第 $i+1$ 个坐标为 0, 随后又有至少 $(l_j+1)^2 - l_j^2 - 1 - (i+1) = 2l_j - (i+1)$ 个坐标都是 1. 因此

$$\rho(\sigma^{l_j^2-i}(x^\eta), e_i) \to 0 \quad (j \to \infty),$$

故

$$e_i \in \omega(x^\eta, \sigma), \quad \forall i > 0.$$

下设 $y \in S^{\mathbb{Z}_+}$ 至少有两个坐标为 0. 不妨设 $y_h = y_m = 0, h < m$. 证明

$$y \notin \omega(x^\eta, \sigma), \quad \forall x^\eta \in C_0.$$

用反证法. 设存在 $\eta \in (0,1)$, 使得 $y \in \omega(x^\eta, \sigma)$, 即存在

$$l_1 < l_2 < \cdots < l_j < \cdots,$$

使

$$\lim_{j\to\infty} \sigma^{l_j}(x^\eta) = y.$$

易见, 当 j 充分大时, $\sigma^{l_j}(x^\eta)$ 的第 $h+1$ 个坐标和第 $m+1$ 个坐标都是 0. 但据 (1), 当 j 充分大时, $\sigma^{l_j}(x^\eta)$ 的任何两个等于 0 的坐标之间可以有任意多个坐标为 1, 导致矛盾. (4) 获证.

下面证明 σ 有较 Li-Yorke 原始定义更强的混沌性状.

命题 3.1.11 下述 (1) 和 (2) 成立:

(1) σ 有 n 周期点,$\forall n > 0$.

(2) 存在不可数集合 $\mathscr{O} \subset S^{\mathbb{Z}_+} - P(\sigma), \sigma(\mathscr{O}) \subset \mathscr{O}$, 满足:

① $\limsup_{n\to\infty} \rho(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) > 0, \forall x, y \in \mathscr{O}, x \neq y$;

② $\liminf_{n\to\infty} \rho(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) = 0, \forall x, y \in \mathscr{O}$;

③ $\liminf_{n\to\infty} \rho(\sigma^n(x), \sigma^n(p)) > 0, \forall x \in \mathscr{O}, p \in P(\sigma) - \{e\}$, 其中 $e = (11\cdots) \in P(\sigma)$.

证明 (1) 即命题 3.1.2.

(2) 下面证明上面构造的 $\mathscr{O}$ 即满足所求.

由上面的 (3) 易见, 当 $0 < \eta < \theta < 1$ 时, $x^\eta \neq x^\theta$. 这证明 C_0 与开区间 $(0,1)$ 的点一一对应, 故不可数. 又 $\sigma(\mathscr{O}) \subset \mathscr{O}$ 是明显的. 最后由上面的 (1) 和 (2) 易见, x^η 的轨道由无限多不同点构成, 因此 x^η 和 $\sigma^l(x^\eta)(\forall l > 0)$ 都不是 σ 的周期点, 即 $\mathscr{O} \subset S^{\mathbb{Z}_+} - P(\sigma)$.

① 设 $\sigma^h(x^\eta)$ 和 $\sigma^m(x^\theta)$ 是 $\mathscr{O}$ 中的不同两点, 其中

$$x^\eta, \quad x^\theta \in C_0, \quad 0 < \eta \leqslant \theta < 1,$$

不妨设 $0 \leqslant h \leqslant m$, 当 $\eta = \theta$ 时, $h < m$.

先设 $h = m$, 这时 $0 < \eta < \theta < 1$. 据 (3), 存在 $l_1 < l_2 < \cdots < l_j < \cdots$ 使得

$$x^\eta_{l_j^2} \neq x^\theta_{l_j^2}, \quad \forall j > 0.$$

因此

$$\rho\left(\sigma^{l_j^2-h}(\sigma^h(x^\eta)), \sigma^{l_j^2-h}(\sigma^h(x^\theta))\right) = \rho\left(\sigma^{l_j^2}(x^\eta), \sigma^{l_j^2}(x^\theta)\right) \geqslant 1, \quad \forall l_j^2 > l.$$

这证明

$$\limsup_{j\to\infty}\rho(\sigma^j(\sigma^h(x^\eta)),\sigma^j(\sigma^h(x^\theta)))\geqslant 1.$$

再设 $h<m$, 这时 $0<\eta\leqslant\theta<1$. 据 (2), 存在 $l_1<l_2<\cdots<l_j<\cdots$ 使得

$$x^\eta_{l_j^2}=0,\quad \forall j\geqslant 1.$$

易见, 当 j 充分大时,

$$\sigma^{l_j^2-h}(\sigma^h(x^\eta))=\sigma^{l_j^2}(x^\eta)\in S_0^{\mathbb{Z}_+},$$

$$\sigma^{l_j^2-h}(\sigma^m(x^\theta))=\sigma^{l_j^2-h+m}(x^\theta)\in S_1^{\mathbb{Z}_+}.$$

因此

$$\limsup_{j\to\infty}\rho(\sigma^{l_j^2-h}(\sigma^h(x^\eta)),\quad \sigma^{l_j^2-h}(\sigma^m(x^\theta)))\geqslant 1.$$

① 获证.

② 设 $\sigma^h(x^\eta)$ 和 $\sigma^m(x^\theta)$ 同 ①. 不妨设

$$l_0^2\leqslant m-h+1\leqslant(l_0+1)^2.$$

由 (1) 易见, 当 $l>l_0$ 时,

$$\sigma^{l^2-h+1}(\sigma^h(x^\eta))=\sigma^{l^2+1}(x^\eta)\in S_1^{\mathbb{Z}_+},$$

$$\sigma^{l^2-h+1}(\sigma^m(x^\theta))=\sigma^{l^2-h+m+1}(x^\theta)\in S_1^{\mathbb{Z}_+},$$

且它们的前 $(l+1)^2-l^2-(m-h+1)=2l-(m-h)$ 个坐标均为 1. 这明显给出 ② 的证明.

③ 设 $\sigma^h(x^\eta)\in\mathscr{O}$, 并设存在 $p\in P(\sigma)$, 使得

$$\liminf_{n\to\infty}\rho(\sigma^n(\sigma^h(x^\eta)),\sigma^n(p))=0.$$

由 p 的周期性易证 $p\in\omega(x^\eta,\sigma)$. 注意到 (4) 中的 $e_i(\forall i>0)$ 均非 σ 的周期点, 故 $p=e$. □

命题 3.1.12 对每一个 $x\in S^{\mathbb{Z}_+}$ 存在一个混沌集 $\mathscr{O}_x$ 满足

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty}\rho(\sigma^n(y),\sigma^n(z))>0,\forall y,z\in\mathscr{O}_x,y\neq z$;

(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty}\rho(\sigma^n(y),\sigma^n(z))=0,\forall y,z\in\mathscr{O}_x$.

证明 对每一个 $r\in(0,1)$, 定义 $x^r\in S^{\mathbb{Z}_+}$, 满足

$$x^r_n\neq x_n\Leftrightarrow \text{存在 } l>0,\ \text{使 } n=l^2,\ \text{且 } [(l+1)r]-[lr]=1,\forall n\geqslant 0.$$

即 x^r 和 x 的区别仅仅在于满足上述条件的平方数坐标处它们的坐标不同. 因为假设 $k=2$, 故上述 x^r 对每一个 $r\in(0,1)$ 是完全确定的 (当 $k>2$ 时也可以定义 x^r, 只需把上述等价关系左侧改成 $x_n^r\equiv x_n+1(\mathrm{mod}\ k)$ 即可).

设 $0<\eta<\theta<1$. 据 (3), 对任意 $N>0$, 存在 $l>N$, 使得 $x_{l^2}^{\eta}\neq x_{l^2}^{\theta}$. 这保证 (i) 成立.

显然, 对任意 $l>0$, $\sigma^{l^2+1}(x^\eta)$与$\sigma^{l^2+1}(x^\theta)$ 至少前 $2l$ 个坐标对应相等. 这保证 (ii) 成立. □

3.2 子系统和有限型子系统

前面我们已经证明了符号动力系统具有一系列复杂的动力性状, 例如有正拓扑熵, 是混沌的, 等等. 也许人们还可以发现更多的其他复杂性状. 但前面讨论的符号动力系统是专指转移自映射或称全转移自映射, 是一个固定的系统, 复杂但无变化. 内容更丰富、应用也更广泛的将是它的子系统, 特别是它的有限型子系统或有限型子转移.

设 $\Lambda\subset S^{\mathbb{Z}_+},\Lambda$ 为紧子集且对 σ 不变, 即 $\sigma(\Lambda)\subset\Lambda$. 我们得到 σ 的子系统 $\sigma|_\Lambda:\Lambda\to\Lambda$. 子系统可分为有限型的和一般的两种, 其中有限型子系统已有系统研究, 内容丰富. 有限型子系统由一个 $\{0,1\}$ 方阵决定.

3.2.1 {0,1}方阵和有限型子系统

设 $k\geqslant 2$, 并记实数域上全体 $k\times k$ 方阵的集合为 M_k. 设 $A=(a_{ij})_0^{k-1}$, $B=(b_{ij})_0^{k-1}\in M_k$. 先引进下述几个术语和记号:

如果 $a_{ij}\geqslant 0,\forall 0\leqslant i,j<k$, 就说 A 是非负的, 全体非负方阵记为 M_k^+;

如果 $a_{ij}\geqslant b_{ij},\forall 0\leqslant i,j<k$, 则记为 $A\geqslant B$, 当 $A\neq B$, 记为 $A>B$;

如果 $a_{ij}>b_{ij},\forall 0\leqslant i,j<k$, 记为 $A\gg B$;

记 $A^n=\overbrace{AA\cdots A}^{n}=(a_{ij}^{(n)}),\forall n>0$; 如果 $A\gg \mathbf{0}$($\mathbf{0}\in M_k$为零方阵), 称 A 是全正的.

事实上, M_k 是 $k\times k$ 维欧氏空间, 可以在其上定义模, 但不唯一. 例如, 可以定义

$$\|A\|=\sum_{i,j=0}^{k-1}|a_{ij}|.$$

我们需要下述命题, 它是著名的 Perron-Frobenius 定理的一部分.

命题 3.2.1 设 $A\in M_k^+$, 则

(i) A 有一个非负特征值, 记作 $\rho(A)$, A 无特征根的模大于 $\rho(A)$, $\rho(A)$ 称为 A 的谱半径;

(ii) 对 M_k 上任意定义的模 $\|A\|$, 有

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

证明参见文献 [50].

设 $A \in M_k^+$.

定义 3.2.2 如果对固定的 $0 \leqslant i, j < k$, 存在 $n > 0$, 使得 $a_{ij}^{(n)} > 0$, 则说 A 是不可约的; 如果存在 $n > 0$, 使得

$$a_{ij}^{(n)} > 0, \forall 0 \leqslant i, j < k, \quad \text{或等价地} \quad A^n \gg \mathbf{0},$$

则说 A 是非周期的.

显然, 非周期蕴涵不可约, 反之不然.

记 E 为 M_k 的单位方阵, 而对 $0 \leqslant i, j < k$, 记 E_{ij} 为把 E 中第 i 行与第 j 行对调, 把第 i 列与第 j 列对调的方阵. 易证 $E_{ij}E_{ij} = E$, 即每一个这样的方阵都是它自己的逆方阵. 又若 $A \in M_k, E_{ij}AE_{ij}$ 是一类特殊的相似变换, 把 A 的第 i 行与第 j 行对调, 把第 i 列与第 j 列对调.

定义 3.2.3 设 $T \in M_k$. 如果 T 是有限个形如 E_{ij} 的方阵的乘积, 则称其为初等方阵, 用初等方阵作相似变换, 叫做初等变换.

非负方阵的不可约性和非周期性在符号动力系统中有重要应用. 下述命题是重要的.

命题 3.2.4 设 $A = (a_{ij}) \in M_k$ 是非负的, 则下述条件等价:

(1) A 不可约;

(2) A 在初等变换下不能变成

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

形状, 其中 B, D 是方阵;

(3) $E + A$ 是非周期的.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 用反证法. 设 T 是初等变换, 使得

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

因为初等变换只是有限次把 A 的不同行对调和相应列对调, 因此存在 $0 \leqslant l, m < k$, 使 $a_{lm} = 0$ 是

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

中矩阵 $\mathbf{0}$ 的元素. 对任意 $n > 0$, 显然, $a_{lm}^{(n)}$ 是

$$TA^nT^{-1} = \begin{pmatrix} B^n & \mathbf{0} \\ C' & D^n \end{pmatrix}$$

中矩阵 $\mathbf{0}$ 的元素, 因此 $a_{lm}^{(n)} = 0$, 这与 A 的不可约性矛盾.

(2) ⇒(3) 证明 $(E + A)^{k-1} \gg \mathbf{0}$.

设 $y = (y_0y_1 \cdots y_{k-1})^{\mathrm{T}}$ 是非负向量, 其中上标 T 表示行向量的转置, 即为列向量.

记

$$(E + A)y = (E + A)(y_0y_1 \cdots y_{k-1})^{\mathrm{T}} = (z_0z_1 \cdots z_{k-1})^{\mathrm{T}} = z.$$

因为 $A \geqslant \mathbf{0}$, 易见

$$y_i \neq 0 \Rightarrow z_i \neq 0, \quad \forall 0 \leqslant i < k.$$

下面在 (2) 的条件下证明, 对任意非负实向量 y, 下述两种情况之一成立 (断言):

(a) z 为严格正向量;

(b) z 中为零的分量的个数严格少于 y 中分量为零的个数.

设上述断言不成立, 即存在 $y \neq 0$, 使得 $(E + A)y = z$ 中分量为零的个数与 y 中的分量为零的个数相等. 易见, 存在初等方阵 T, 使方程组

$$(E + A)y = z$$

与

$$(E + TAT^{-1})(0 \ \ u)^{\mathrm{T}} = (0 \ \ v)^{\mathrm{T}}$$

等价, 其中 $u > 0, v > 0$ 为严格正向量, 且维数相同. 记

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{pmatrix}.$$

整理后, 得

$$\begin{cases} 0 + A_{01}u = 0, \\ u + A_{11}u = v. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

因为 $u > 0$, 故 $A_{01} = \mathbf{0}$, 这与 (2) 矛盾, 上述断言获证. 显然对任意向量 $y \neq 0$,

$$(E + A)^{k-1}y$$

是全正向量, 即

$$(E+A)^{k-1} \gg \mathbf{0}.$$

(3) ⇒ (1) 设 $n>0$, 使

$$(E+A)^{n} \gg \mathbf{0}.$$

按牛顿二项式展开, 上式左端乘以 A, 得

$$A^{n+1}+C_n^{n-1}A^n+\cdots+C_n^1A^2+A \gg \mathbf{0},$$

其中 C_n^i 为牛顿二项式系数, $0 \leqslant i < n$. 显然, 对 $0 \leqslant i,j < k$, 有

$$a_{ij}^{(n+1)}+C_n^{n-1}a_{ij}^{(n)}+\cdots+C_n^1a_{ij}^{(2)}+a_{ij}>0,$$

因此, $a_{ij}^{(n+1)},\cdots,a_{ij}$ 中至少有一项不为零, 即 A 为不可约方阵. □

关于非负方阵的标准型, 有

命题 3.2.5 设 $A=(a_{ij})\in M_k$ 是非负方阵, 且每一行、每一列的元素都不全为零, 则 A 在初等变换下有如下的标准型:

$$A=\begin{pmatrix} A_{k_1} & & & \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k_r} \\ A_{k_{r+1}k_1} & \cdots & A_{k_{r+1}k_r} & A_{k_{r+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{k_sk_1} & \cdots & A_{k_sk_{s-1}} & A_{k_s} \end{pmatrix}$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_s=k, k_i>0$, A_{k_i} 为非负方阵, $i=1,2,\cdots,s$; $A_{k_lk_1},\cdots,A_{k_lk_{k-1}}$ 中至少有一个不是矩阵 $\mathbf{0}$, $l=r+1,\cdots,s$.

证明 如果 A 是不可约的, 则 $A=A_{k_1}$. 下设 A 可约. 据命题 3.2.4, A 可在初等变换下变成如下形状:

$$\begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ C & D \end{pmatrix}.$$

若 B,D 均不可约, 证明完成. 若 B, D 中仍有可约方阵, 例如, B 可约, 则上面的方阵在初等变换下又可变成

$$\begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ H & L & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{C} & D \end{pmatrix}.$$

这个过程可以一直持续下去, 直到 A 在初等变换下变成如下形状:

$$\begin{pmatrix} A_{k_1} & & & \\ 0 & A_{k_2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & A_{k_s} \end{pmatrix}$$

为止, 其中, A_{k_i} 为相应阶不可约非负方阵, $i=1,2,\cdots,s$. 命题其余部分显然可在初等变换下完成. □

下面设 B 和 C 均为 $k\times k$ 不可约方阵. 还有下述简单结论.

命题 3.2.6 (1) B 不可约 (非周期) 蕴涵 B^{T} 亦然;

(2) B 不可约 (非周期) 蕴涵 $B+C$ 亦然.

从定义出发直接证明, 从略.

3.2.2 非负方阵的有向图

在非负方阵的传统理论中, 每一个 $k\times k$ 非负方阵 $A=(a_{ij})$ 都对应一个有向图, 它的顶点的个数与非负方阵的阶数相同, 即为 k, 记为 $P_0,P_1,\cdots,P_{k-1}$, 而从 P_i 到 P_j 有一个有向弧, 如果 $a_{ij}\neq 0, i,j=0,1,\cdots,k-1$.

例 3.2.1 设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则对应 A,B,C 的有向图依次为图 3.2.1(a), (b), (c).

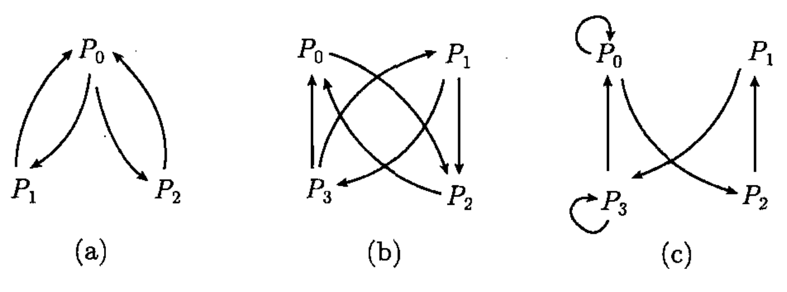


图 3.2.1 方阵的有向图

利用非负方阵的有向图, 很容易给出不可约方阵的判断: 非负方阵不可约, 当且仅当在相联系的有向图中任意两个顶点之间存在有向弧相连接 (这个性质叫做 "有向图的强连通性").

例如, 在上面的例子中, 易于看出 A 和 C 是不可约的, 但 B 不是, 因为在 B 所联系的有向图中, 没有从顶点 P_0 通向顶点 P_1 的有向弧.

但是, 这样定义的有向图, 用来判断非周期性就不简单. 作者引进一个新的有向图, 其顶点不是固定的, 而且它可以在非负方阵上直接实现.

定义 3.2.7 设 $A=(a_{ij})\in M_k$ 是非负方阵, 在 A 上定义一个有向图 $G(A)$ 如下:

a_{ij} 是 $G(A)$ 的一个顶点, 当且仅当 $a_{ij}>0$; 从顶点 a_{ij} 到顶点 a_{lm} 有一条有向弧, 记作 $a_{ij}\to a_{lm}$, 当且仅当 $j=l$, 即在 A 中, 正元素构成 $G(A)$ 的全部顶点, 且从一个顶点到另一个顶点有一条有向弧, 当且仅当前者的列指标等于后者的行指标.

例如, 上面例 3.2.1 中的 A,B,C 所决定的有向图如图 3.2.2—3.2.4.

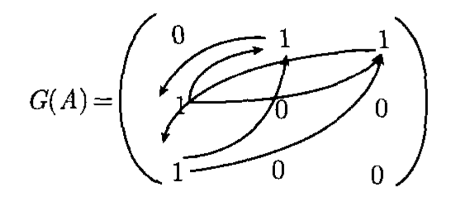


图 3.2.2　A 的有向图

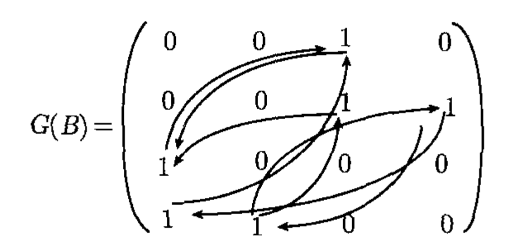


图 3.2.3　B 的有向图

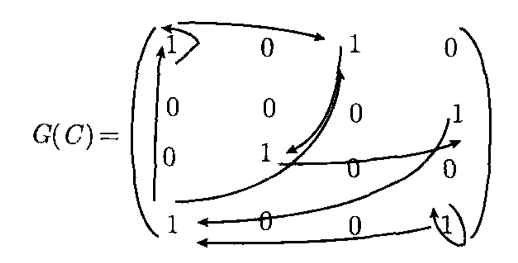


图 3.2.4　C 的有向图

非负方阵的有向图将是我们讨论有限型子转移的主要工具, 因此下面对非负方阵的有向图作较为详尽的讨论. 先引进一些名词和简单事实. 设 $A=(a_{ij})\in M_k$ 为非负方阵.

(a) 有向路径

$$P=a_{i_0i_1}\to a_{i_1i_2}\to\cdots\to a_{i_rl}\quad (r>0)$$

中, 顶点的个数叫做它的长度, 记作 $|P|$.

当 $l = i_0$ 时, P 叫做闭路.

(b) 有重复顶点的闭路叫做可约闭路. 不是可约闭路的闭路叫做不可约闭路, 其顶点的个数叫做它的的周期.

(c) 设

$$Q = a_{j_0 j_1} \to a_{j_1 j_2} \to \cdots \to a_{j_s m} \quad (s > 0)$$

是另一条有向路径. 当 $l = j_0$ 时,

$$PQ = a_{i_0 i_1} \to \cdots \to a_{i_r l} \to a_{j_0 j_1} \to \cdots \to a_{j_s m}$$

叫做 P 与 Q 的合成有向路径, 显然 $|PQ| = |P| + |Q|$.

特别地, 有公共顶点的两个不同闭路可在公共顶点处连接起来, 得到一个新的闭路, 其周期为两者周期之和. 这样得到的闭路称作闭路的合成.

显然, 任何闭路都是不可约闭路的合成.

(d) 当 P 是闭路时,

$$\overbrace{PP\cdots P}^{i} \quad (i > 0)$$

亦是闭路, 周期为 $i|P|$.

利用上面定义的非负方阵的有向图, 不但判断不可约性简单, 而且判断非周期性也同样简单. 这个问题留待讨论有限型子转移时一并讨论.

3.2.3 有限型子转移

设 $\sigma : \Sigma_k \to \Sigma_k (k > 1)$ 为 k 阶转移自映射, 用 $L(\Sigma_k)$ 表示 Σ_k 的全体对 σ 不变的紧致子集. 设 $\Lambda \in L(\Sigma_k))$, 得到子转移

$$\sigma|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda.$$

设 $A = (a_0 a_1 \cdots a_{n-1})$ 是 S 上的长度为 $n > 2$ 的有限序列或 n 序列. 设 $x \in \Sigma_k$. 如果存在 $m \geqslant 0$, 使得

$$x_{m+i} = a_i, \quad i = 0, \cdots, n-1,$$

即 x 属于 A 上的某个柱形, 就说 A 出现在 x 内, 或 x 含有 A, 记作 $A \prec x$; 如果存在 $x \in \Lambda$, 使 $A \prec x$, 则说 A 出现在 $\Lambda \in L(\Sigma_k)$ 内.

设 $B = (b_0 b_1 \cdots b_{m-1})$ 也是 S 上的有限序列. 如果 $m > n$ 且存在 $0 \leqslant l \leqslant m-n$, 使得

$$b_{l+i} = a_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1,$$

就说 A 出现在 B 内, 也说 A 是 B 的子序列, 记作 $A \prec B$.

设 $\mathscr{A}$ 是 S 上有限序列的一个集合. 记

$$\Lambda_{\mathscr{A}} = \{x \in \Sigma_k | A \not\prec x, \forall A \in \mathscr{A}\}.$$

命题 3.2.8 对 S 上任意有限序列集合 $\mathscr{A}, \Lambda_{\mathscr{A}} \in L(\Sigma_k)$.

证明 设 $A \in \mathscr{A}$. 据定义, A 可以在其内出现的点的集合是 A 上所有柱形的并集, 因而是开集. 因此, A 不能出现在其内的点的集合是 Σ_k 的闭子集. 显然, $\Lambda_{\mathscr{A}}$ 即是当 A 跑遍 $\mathscr{A}$ 时 A 所对应的这样的集合的交集, 因而也是 Σ_k 的闭集. $\Lambda_{\mathscr{A}}$ 对 σ 的不变性是明显的, 因为按定义, A 不能出现在 x 内, 当然, 也不能出现在 $\sigma(x)$ 内. □

据命题 3.2.8, 每一个 S 上给定有限序列的集合 $\mathscr{A}$, 就决定 Σ_k 的一个对 σ 不变的闭子集 $\Lambda_{\mathscr{A}}$, 因而决定一个子系统

$$\sigma|_{\Lambda_{\mathscr{A}}} : \Lambda_{\mathscr{A}} \to \Lambda_{\mathscr{A}}.$$

$\mathscr{A}$ 叫做 $\Lambda_{\mathscr{A}}$ 或子系统 $\sigma|_{\Lambda_{\mathscr{A}}}$ 的排除系统, $\sigma|_{\Lambda_{\mathscr{A}}}$ 叫做由排除系统 $\mathscr{A}$ 决定的子转移.

命题 3.2.9 设 $\Lambda \in L(\Sigma_k)$, 则存在 S 上有限序列的集合 $\mathscr{A}$, 使得 $\Lambda = \Lambda_{\mathscr{A}}$.

证明 令 $\mathscr{A}$ 是 S 上所有不出现 Λ 内的有限序列的集合, 由排除系统的定义, 易见

$$\Lambda \subset \Lambda_{\mathscr{A}}.$$

若 $\Lambda \subsetneqq \Lambda_{\mathscr{A}}$, 则 $\Lambda_{\mathscr{A}} - \Lambda$ 是 $\Lambda_{\mathscr{A}}$ 的非空开集, 故存在 Σ_k 的开集 U, 使得 $U \cap \Lambda_{\mathscr{A}} = \Lambda_{\mathscr{A}} - \Lambda$.

设 $B = (b_0 b_1 \cdots b_{n-1})(n > 1)$ 为有限序列, 使

$${}_0[B] \subset U,$$

其中 ${}_0[B] = \{x \in \Sigma_k | x_i = b_i, i = 0, 1, \cdots, n-1\}$. 于是有

$${}_0[B] \cap \Lambda_{\mathscr{A}} \subset \Lambda_{\mathscr{A}} - \Lambda.$$

若存在 $x \in \Lambda$, 使 $B \prec x$, 或对某个 $m > 0, x \in_m [B]$, 则

$$\sigma^m(x) \in_0 [B].$$

但是

$$\sigma^m(x) \in \Lambda \subset \Lambda_{\mathscr{A}},$$

这导致

$${}_0[B] \cap \Lambda_{\mathscr{A}} \not\subset \Lambda_{\mathscr{A}} - \Lambda$$

的矛盾. 故 B 可以出现在 $\Lambda_{\mathscr{A}}$, 但不能出现在 Λ 内. 按 $\mathscr{A}$ 的定义, $B \in \mathscr{A}$. 这又与 B 可以出现在 $\Lambda_{\mathscr{A}}$ 内矛盾. 这个矛盾由假设 $\Lambda \subsetneqq \Lambda_{\mathscr{A}}$ 引起. 因此

$$\Lambda = \Lambda_{\mathscr{A}}. \qquad \square$$

推论 3.2.10 设 $\mathscr{A}$ 为 S 上有限序列的集合, 则

$$\Lambda_{\mathscr{A}} = \bigcap_{A \in \mathscr{A}} \Lambda_{\{A\}},$$

进而, 若 $\mathscr{A}_n \subset \mathscr{A}_{n+1} (\forall n > 0)$ 且 $\mathscr{A} = \bigcup\limits_{n>0} \mathscr{A}_n$, 则

$$\Lambda_{\mathscr{A}} = \bigcap_{n>0} \Lambda_{\mathscr{A}_n}.$$

从定义出发直接验证, 从略.

命题 3.2.11 设 $\mathscr{A}$ 为 S 上有限序列的集合, 则存在 S 上有限序列集合序列 $\{\mathscr{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$, 满足

$$\mathscr{A}_n \subset \mathscr{A}_{n+1} \subset \mathscr{A}, \quad \mathscr{A} = \bigcup_{n>0} \mathscr{A}_n,$$

因而

$$\Lambda_{\mathscr{A}} = \bigcap_{n>0} \Lambda_{\mathscr{A}_n}.$$

证明 对每一个 $n > 0$, 令 $\mathscr{A}_n$ 是 $\mathscr{A}$ 中所有长度不大于 n 的有限序列的集合. 显然

$$\mathscr{A}_n \subset \mathscr{A}_{n+1} \subset \mathscr{A} \text{ 和 } \mathscr{A} = \bigcup_{n>0} \mathscr{A}_n. \qquad \square$$

从命题 3.2.9 可以看出, 每一个 $\Lambda \in L(\Sigma_k)$ 可以由 S 上一个有限序列集合, 即排除系统决定, 反之, S 上每一个有限序列集合可以决定一个 $\Lambda \in L(\Sigma_k)$. 但容易看出, 这种决定不是一对一的, 且任何一个排除系统可以扩大成一个无穷集合 (如果它原来是有限集合的话) 而不改变所决定的子系统. 命题 3.2.11 说明, 每一个子转移可以由可数个有限元素构成的排除系统决定. 显然地, 由有限的排除系统决定的子转移更容易掌握, 因而也就更简单些. 这导致子转移的分类.

定义 3.2.12 设 $\Lambda \in L(\Sigma_k)$. 如果 Λ 有一个有限的排除系统, 则称 Λ 或子转移

$$\sigma|_{\Lambda} : \Lambda \to \Lambda$$

为有限型的, 并称这个排除系统所含有的有限序列的最大长度为其阶数, 而其所有排除系统的阶数的下确界称为子转移的阶数. 阶数是一个正整数.

有限型子转移和非有限型子转移在动力性状上可以大相径庭, 前者较后者要简单得多, 结果也丰富得多, 并有广泛的应用. 下面先给出有限型子转移的一些等价条件.

命题 3.2.13　设 $\Lambda \in L(\Sigma_k)$, 则下述条件等价:

(1) Λ 是有限型的, 阶数为 $N>0$;

(2) 存在 S 上的长度为 $N>0$ 的有限序列集合 $\mathscr{B}'$, 使得

$$\Lambda=\{x\in\Sigma_k|\forall n\geqslant 0,(x_nx_{n+1}\cdots x_{n+N-1})\in\mathscr{B}'\},$$

这个 $\mathscr{B}'$ 叫做 Λ 的决定系统;

(3) 设 $x,y\in\Lambda$, 对某个 $n\geqslant 0$, 有

$$x_l=y_l,\quad l=n,\quad n+1,\cdots,n+N-2.$$

定义 $z\in\Sigma_k$, 使

$$z_l=\begin{cases}x_l, & 当\ l\leqslant n+N-2;\\ y_l, & 当\ l\geqslant n,\forall l\geqslant 0,\end{cases}$$

则 $z\in\Lambda$;

(4) 对任意 $n\geqslant N+1$ 和任意 S 上有限序列 $(a_0a_1\cdots a_n)$, 若

$$U={}_0[a_0a_1\cdots a_{n-1}]\cap\Lambda\neq\varnothing,$$

$$V={}_{n-N+1}[a_{n-N+1}\cdots a_n]\cap\Lambda\neq\varnothing,$$

则

$$U\cap V\neq\varnothing.$$

证明　(1) ⇒ (2) 设 $\mathscr{B}$ 是 Λ 的一个所有元素长度均为 N 的排除系统 (这样的系统显然存在). 易见, S 上所有 N 序列的集合与 $\mathscr{B}$ 的差集即是 $\mathscr{B}'$.

(2) ⇒ (3) 易见, 对每一个 $l\geqslant 0$, 有

$$(z_lz_{l+1}\cdots z_{l+N-1})=(x_lx_{l+1}\cdots x_{l+N-1})$$

或

$$(z_lz_{l+1}\cdots z_{l+N-1})=(y_ly_{l+1}\cdots y_{l+N-1}).$$

据 (2), $z\in\Lambda$.

(3) ⇒ (4) 设 $x\in U$, 则 $x\in\Lambda$, 且有

$$x=(a_0a_1\cdots a_{n-1}x_nx_{n+1}\cdots).$$

同样, 设 $y \in V$, 则 $y \in \Lambda$ 且

$$y = (y_0 y_1 \cdots y_{n-N} a_{n-N+1} \cdots a_n y_{n+1} \cdots).$$

易见

$$x_i = y_i, \quad i = n - N + 1, \cdots, n - 1,$$

即 x 和 y 有连续 $N-1$ 个坐标对应相等, 据 (3), 存在 $z \in U \cap V \cap \Lambda$, 即

$$U \cap V \neq \varnothing.$$

(4) ⇒ (1) 设 $\mathscr{B}$ 是所有不出现在 Λ 内的 N 序列的集合, 易见

$$\Lambda \subset \Lambda_{\mathscr{B}}.$$

若 Λ 不是 N 阶的, 则有

$$\Lambda \subsetneqq \Lambda_{\mathscr{B}}.$$

这蕴涵存在 $n+1$ 序列

$$B = (a_0 a_1 \cdots a_n) \quad (n > N),$$

使 B 出现在 $\Lambda_{\mathscr{B}}$ 内, 但不出现在 Λ 内. 显然, 能出现在 $\Lambda_{\mathscr{B}}$ 内的 N 序列也能出现在 Λ 内, 故可设 $(b_0 b_1 \cdots b_{n-1})$ 出现在 Λ 内. 因此

$$U =_0 [a_0 a_1 \cdots a_{n-1}] \cap \Lambda \neq \varnothing.$$

又记

$$V =_{n-N+1} [a_{n-N+1} \cdots a_n] \cap \Lambda.$$

因为 $(a_{n-N+1} \cdots a_n)$ 出现在 $\Lambda_{\mathscr{B}}$ 内, 故也出现在 Λ 内, 因而

$$V \neq \varnothing.$$

据 (4),

$$\varnothing \neq U \cap V =_0 [a_0 \cdots a_n] \cap \Lambda.$$

这与 $B = (a_0 \cdots a_n)$ 不出现在 Λ 内矛盾. 因此

$$\Lambda = \Lambda_{\mathscr{B}}.$$

即 Λ 是 N 阶的有限型. □

下述命题说明只有 2 阶有限型子转移才是本质的.

命题 3.2.14　任何有限型子转移都与一个 2 阶有限型子转移拓扑共轭.

证明　设 $\Lambda \in L(\Sigma_k)$ 是 $N \geqslant 2$ 阶子转移, $\mathscr{A}$ 是它的一个排除系统. 记

$$\mathscr{B} = \{B : |B| = N, \text{且存在 } A \in \mathscr{A} \text{使 } A \prec B\}.$$

易见, 若 $x \in \Sigma_k$, 则 $\mathscr{A}$ 中每一个元素都不能出现在 x 内当且仅当 $\mathscr{B}$ 中每一个元素都不能出现在 x 内. 因此

$$\Lambda_{\mathscr{A}} = \Lambda_{\mathscr{B}}.$$

令

$$Q = \{B = (b_0 b_1 \cdots b_{N-1}) | \text{ 存在 } x \in \Lambda, \text{使 } B \prec x\},$$

即 Q 是 S 上所有可以出现在 Λ 内的 N 序列的 (有限) 集合. 把这样的 N 序列视为新的符号, Q 是由它们构成的新的状态空间, 因而得到一个新的符号空间 $Q^{\mathbb{Z}_+}$, 记其上的转移自映射为 σ'. 记 $\mathscr{B}'$ 是 Q 上满足下述条件的全体 2 序列 (B, B') 的集合: 存在 $1 \leqslant i, j \leqslant N-1$, 使得 $b_j \neq b'_{j-1}$, 其中

$$B = (b_0 b_1 \cdots b_{N-1}), \quad B' = (b'_0 b'_1 \cdots b'_{N-1}).$$

记 $\Lambda' = \Lambda_{\mathscr{B}'} \in L(Q^{\mathbb{Z}_+})$.

定义

$$\begin{cases} \pi : \Lambda \to Q^{\mathbb{Z}_+}, \\ x \mapsto (B_0 B_1 \cdots), \end{cases} \tag{3.2.2}$$

其中 $B_l = (x_l x_{l+1} \cdots x_{l+N-1}), \forall l \geqslant 0$. 易见, 当 $x \in \Lambda$ 时, Q 上 2 序列 (B_l, B_{l+1}) 不属于 $\mathscr{B}'$, 因此

$$\pi(\Lambda) \subset \Lambda'.$$

容易验证, π 是连续的、一对一的, 且是满的, 因而是同胚的. 进而容易看出

$$\pi \sigma_A = \sigma'_A \pi,$$

即 π 是 σ_A 和 σ'_A 之间的拓扑共轭, 而后者是一个 2 阶有限型子转移. □

这个结果自然非常重要, 它把有限型子转移的讨论归结为 2 阶有限型子转移的讨论. 只有 2 阶子转移才是本质的. 2 阶有限型子转移亦称马尔可夫链. 此后, 我们说到有限型子转移总是指 2 阶有限型子转移, 即它有一个 2 阶排除系统或它有 2 阶决定系统.

3.2.4 有限型子转移的转移方阵

下面设 $\Lambda \in L(\Sigma_k)$ 是一个有限型子转移.

定义 3.2.15 如果

$$a_{ij} = \begin{cases} l, & \text{当 } (ij) \prec \Lambda; \\ 0, & \text{其余情形}, \end{cases}$$

则 $k \times k$ 阶 $\{0,1\}$ 方阵

$$A = (a_{ij}) \in M_k$$

叫做 Λ 的转移方阵, 子转移记作

$$\sigma_A : \Lambda \to \Lambda,$$

这里 (ij) 是 S 上 2 序列.

显然, 对给定的 $\Lambda \in L(\Sigma_k), A = (a_{ij})$ 是完全确定的, 反过来, 我们要问, 一个 $k \times k$ 阶 $\{0,1\}$ 方阵是否可以决定一个有限型子转移? 下述命题回答了这个问题.

命题 3.2.16 设 $A = (a_{ij}) \in M_k$ 为 $\{0,1\}$ 方阵, 则

$$\Lambda_A = \{x \in \Sigma_k | a_{x_i x_{i+1}} = 1, \forall i \geqslant 0\}$$

是对 σ 不变的有限型闭子集 (可能是空集).

证明 Λ_A 闭且对 σ 不变可以由定义直接证明. 令

$$\mathscr{A} = \{(ij) | a_{ij} = 0, \forall 0 \leqslant i, j < k\},$$

易于直接验证, $\mathscr{A}$ 是 Λ_A 的一个排除系统. 因此, Λ_A 是有限型的. □

例如, 设

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\Lambda_{A_1} = \varnothing; \quad \Lambda_{A_2} = \varnothing; \quad \Lambda_{A_3} = \{(011\cdots), (11\cdots)\}; \quad \Lambda_{A_4} = \{(11\cdots)\}.$$

从上述例子中可以看出, $\{0,1\}$ 方阵可以对应空的集合, 不同的 $\{0,1\}$ 方阵也可以对应同一个有限型子转移, 因此 $\{0,1\}$ 方阵与有限型子转移不是一一对应的. 我们将会看到, 对 $\{0,1\}$ 方阵加上适当限制, 这个情况将会消失. 下面先引进一些术语和符号.

设 $A=(a_{ij})\in M_k$ 是 $\{0,1\}$ 方阵, 和

$$\sigma_A:\Lambda_A\to\Lambda_A$$

同上.

定义 3.2.17 $S=(0,1,\cdots,k-1)$ 上 n 序列

$$(i_0i_1\cdots i_{n-1})$$

叫做可允许的 (相对 $A=(a_{ij})$ 或 Λ_A), 如果

$$_m[i_0\cdots i_{n-1}]_A=\{x\in\Lambda_A|x_m=i_0,\cdots,x_{m+n-1}=i_{n-1}\}={}_m[i_0\cdots i_{n-1}]\cap\Lambda_A\neq\varnothing,$$

其中

$$_m[i_0\cdots i_{n-1}]$$

是 $(i_0\cdots i_{n-1})(m\geqslant 0)$ 上的柱形, 而

$$_m[i_0\cdots i_{n-1}]_A$$

叫做相对柱形, 它是 Λ_A 的既开又闭的集合, 且所有相对柱形, 即

$$\{_m[i_0i_1\cdots i_{n-1}]_A|i_l\in S,l=0,1,\cdots,n-1,\forall n>0,\forall m\geqslant 0\}$$

是 Λ_A 的相对拓扑的一组基.

特别地, 当

$$_m[i_0,i_1]_A\neq\varnothing$$

时, 称 i_0 为 i_1 的可允许前缀, i_1 为 i_0 的可允许后缀.

下面是一些术语和简单事实.

(a) 易见, i_0 是 i_1 的可允许前缀或 i_1 是 i_0 的可允许后缀当且仅当 $a_{i_0i_1}=1$, 即 $a_{i_0i_1}$ 是 $G(A)$ 的一个顶点;

(b) 设 $P_1=(i_0i_1\cdots i_{n-1}),P_2=(j_0j_1\cdots j_{m-1})(n>0,m>0)$ 是两个可允许序列. 若 j_0 是 i_{n-1} 的可允许后缀, 则易见

$$P_1P_2=(i_0i_1\cdots i_{n-1}j_0j_1\cdots j_{m-1})$$

是可允许 $n+m$ 序列, 叫做 P_1 和 P_2 的合成.

当 i_0 是 i_{n-1} 的可允许后缀时,

$$P_1P_1\cdots=(i_0\cdots i_{n-1}i_0\cdots i_{n-1}\cdots)\in\Lambda_A$$

是 σ_A 的一个周期点, 周期不大于 n. 这时, P_1 称作可允许循环节. 当其周期为 n 时, 即等于 P_1 的长度, 称 P_1 为可允许周期节;

(c) 符号两两不同的可允许循环节一定是可允许周期节, 称作不可约可允许周期节. 由不可约可允许周期节生成的周期点的周期称作 σ_A 的不可约周期;

(d) 同一个不可约周期可以对应不同不可约可允许周期节或 σ_A 的周期点;

(e) 有公共符号的可允许循环节可在公共符号处连接在一起而构成合成的可允许循环节. 显然, 可允许循环节和可允许周期节均可由可允许不可约周期节合成而得到;

(f) 设

$$P = a_{i_0 i_1} \to a_{i_0 i_2} \to \cdots \to a_{i_{n-1} i_n}$$

是 $G(A)$ 的一个长度为 n 的有向路径, 它对应一个 $n+1$ 的序列

$$i_0 i_1 \cdots i_n.$$

易举例说明, 它不一定是可允许的.

当 $i_0 = i_n$ 时, P 对应一个循环节 $(i_0 i_1 \cdots i_{n-1})$. 易于证明, 这样的循环节总是可允许的, 事实上,

$$PP \cdots = (i_0 \cdots i_{n-1} i_0 \cdots i_{n-1} \cdots) \in \Lambda_A,$$

即

$${}_0[i_0 \cdots i_{n-1}]_A \neq \varnothing.$$

特别地, $G(A)$ 的闭路对应长度相同的可允许循环节, 反之, 一个可允许循环节对应 $G(A)$ 的一条闭路.

(g) 不可约闭路一定对应可允许周期节, 这是因为, 可允许非周期循环节对应 $G(A)$ 的闭路有重复的顶点, 即不是不可约的. 但是, 容易举例说明, 不可约闭路对应的周期节不一定是不可约的. 例如, 取图 3.2.5.

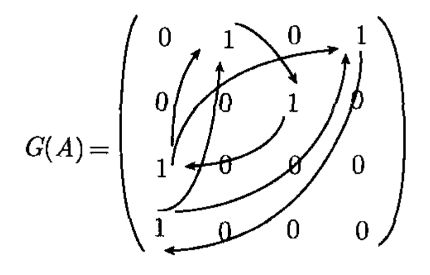


图 3.2.5 有向图

易见

$$a_{01} \to a_{12} \to a_{20} \to a_{03} \to a_{30}$$

是 $G(A)$ 的一条不可约闭路, 但对应的可允许周期节

$$(01203)$$

却不是不可约的, 而是由两个不可约周期节

$$(012), \quad (03)$$

合成的.

命题 3.2.18　*若 $A=(a_{ij})$ 中第 i 行元素全部为零, $0\leqslant i<k$, 则 Λ_A 中点的坐标分量中不出现符号 i.*

证明　据假设 $a_{ij}=0, j=0,1,\cdots,k-1$. 显然, i 没有可允许后缀, 因此, i 不可能出现在 Λ_A 的点的坐标中. □

命题 3.2.19　*若 $A=(a_{ij})$ 中第 j 列元素全部为零, $0\leqslant j<k$, 则符号 j 只能作为最前面的分量出现在 Λ_A 的点中 (在双边情形中则不能出现). 当这样的点存在时, Λ_A 不是在上的.*

证明　据假设 $a_{ij}=0, i=0,1,\cdots,k-1$. 显然, j 没有可允许前缀, 因此, 它如出现在 Λ_A 的点的坐标中, 只能是最前面的分量. 据转移自映射的定义, 没有点以这样的点为像集, 故 Λ_A 不是在上的.

在双边的情形, 没有最前面的分量, 故 j 不可能出现. □

据命题 3.2.18, 在非负方阵 $A=(a_{ij})$ 中, 若有一行元素全部为零, 则它决定的有限型子转移归结为较低阶符号动力系统.

在命题 3.2.19 的条件下, 把 $A=(a_{ij})$ 中的第 j 列元素全部换成零, 其余的不变, 得到一个同阶的 $\{0,1\}$ 方阵 A_1, 容易看出, Λ_{A_1} 即是在 Λ_A 中把以 j 为最前面的坐标分量的点去掉后的集合. 容易证明, 两者有相同的非游荡集, 因而有相同的动力性状.

下面分析一下, 当 $\{0,1\}$ 方阵 $A=(a_{ij})$ 作初等变换时, 对它所决定的有限型子转移有什么影响.

我们在定义 k 阶符号空间时, k 个符号是取作 $S=(0,1,\cdots,k-1)$. 这样取 k 个符号的同时, 也规定了它们之间的一个顺序 (按自然数大小顺序). 当用 $\{0,1\}$ 方阵 $A=(a_{ij})$ 定义 Λ_A 时, 事实上只不过是规定了这 k 个符号之间可以作为可允许前缀和可允许后缀的关系而已. 当这 k 个符号的排列顺序改变时 (即经过一个置换变换), 为了保持符号之间这种关系不变, $\{0,1\}$ 方阵 $A=(a_{ij})$ 也必须作相应改变, 而这种改变恰恰就是初等变换. 这很容易从两个符号对调这种简单情形看出来, 而一般置换又不过是对调的乘积而已. 例如, 当 $0\leqslant i,j<k$ 对调时, 为了保持符号间可以作为前缀和后缀的关系不变, 必须也只需把 $A=(a_{ij})$ 的第 i 行与第 j 行对调, 再把第 i 列与第 j 列对调, 即作相应的初等变换. 因此有

命题 3.2.20 *在初等变换下, $\{0,1\}$ 方阵所决定的有限型子转移不变.*

在作了这些讨论之后, 此后总是假设 $\{0,1\}$ 方阵 $A=(a_{ij})$ 的每一行和每一列的元素不全为零. 而且在必要时, 总假设它们已化成前面所述那种下三角阵的形式. 这个假设一直坚持而不再声明.

下面设 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ 是两个 $k\times k$-$\{0,1\}$ 方阵.

命题 3.2.21 *$G(A)$ 的每一个有向路径所决定的有限序列总是可允许的.*

证明 由 $A=(a_{ij})$ 的每一行和每一列的元素不全为零的假设, 容易从有向图的定义看出, $G(A)$ 的从任意顶点出发的有向路径总是可以无限延伸. 这事实上保证了有向路径决定的序列总是可允许的. □

推论 3.2.22 *对任意 $0\leqslant i,j<k$,*

$$a_{ij}=1 \Leftrightarrow_0 [ij]_A \neq \varnothing.$$

命题 3.2.23 *$P(\sigma_A)\neq\varnothing$, 即周期点集不空.*

证明从略.

命题 3.2.24 $A\neq B \Leftrightarrow \Lambda_A\neq\Lambda_B$.

证明 显然 $A=B\Rightarrow\Lambda_A=\Lambda_B$. 这证明 $\Leftarrow$ 部分.

下面证明 $\Rightarrow$ 部分. 设 $a_{ij}=0$ 但 $b_{ij}=1, 0\leqslant i,j<k$. 据定义, (ij) 在 Λ_A 中不能出现, 但据推论 3.2.22, 它在 Λ_B 中出现, 因此

$$\Lambda_A\neq\Lambda_B.$$

□

推论 3.2.25 *$k\times k$-$\{0,1\}$ 方阵与*

$$\sigma:\Sigma_k\to\Sigma_k$$

的有限型子转移一一对应.

结论显然, 证明从略.

命题 3.2.26 *σ_A 在上, 且 $S=\{0,1,\cdots,k-1\}$ 每一个符号均在 Λ_A 的点出现.*

证明 设 $x=(x_0x_1\cdots)\in\Lambda_A$. 据假设, 存在 i, $0\leqslant i\leqslant k$, 使得 $a_{ix_0}=1$. 显然, $(ix_0x_1\cdots)\in\Lambda_A$ 和 $\sigma(ix_0x_1\cdots)=x$. 又对任意的 $i, 0\leqslant i<k$. 据假设, 存在 $j, 0\leqslant j<k$, 使 $a_{ij}=1$, 据推论 3.2.22, (ij) 是可允许的 2 序列, 即符号 i 在 Λ_A 的点中出现. □

在作了这些铺垫之后, 我们可以讨论有限型子转移的动力性状了.

3.2.5 有限型子转移的动力性状

有限型子转移与全转移的一个重要不同, 是它可以有游荡点. 这引起有关重要问题, 即有限型子转移的非游荡集结构问题. 我们从非游荡点的判断讨论起.

设 $k>1,(\Sigma_k,\sigma)$ 同前. 又设 $A=(a_{ij})\in M_k$ 为 $\{0,1\}$ 方阵, Λ_A 为由它决定的有限型不变闭子集.

命题 3.2.27 设 $x\in\Lambda_A$. 则下述条件等价:

(1) $x\in\Omega(\sigma_A)$;

(2) 对任意的 $N>0$, 存在 $y\in\Lambda_A$, 使 $y_0=x_N$, 并对某个 $j>0, y_j=x_0$;

(3) 对任意 $i>0$, 存在从 $a_{x_ix_{i+1}}$ 到 $a_{x_0x_1}$ 的有向路径.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 $x\in\Omega(\sigma_A)$和$N>0$, 据非游荡集的定义, 存在 $n>N$, 使

$$\sigma_A^n({}_0[x_0\cdots x_N]_A)\cap{}_0[x_0\cdots x_N]_A\neq\varnothing,$$

即存在 $z\in{}_0[x_0\cdots x_N]_A$, 使得

$$\sigma_A^n(z)\in{}_0[x_0\cdots x_N]_A.$$

由此易见

$$z_n=x_0,\quad z_i=x_i,\quad i=0,1,\cdots,N.$$

记 $y=\sigma_A^N(z)\in\Lambda_A$, 易见

$$y_0=z_N=x_N,\quad y_j=x_0,\quad j=n-N>0.$$

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 $i>0$. 据 (2), 存在 $y\in\Lambda_A$, 使

$$x_n=y_0,\quad x_0=y_j,\quad j>0,n>i,$$

显然 $(x_ix_{i+1}\cdots x_ny_1\cdots y_{j-1}x_0x_1)$ 是可允许序列, 因此

$$a_{x_ix_{i+1}}\to\cdots\to a_{j-1x_0}\to a_{x_0x_1}$$

是 $G(A)$ 的有向路径.

(3) $\Rightarrow$ (1) 设 $N>0$ 和柱形${}_0[x_0\cdots x_N]_A$. 取 $i\geqslant N$, 据假设, 存在有向路径

$$a_{x_ix_{i+1}}\to\cdots\to a_{x_{i+r}x_{i+r+1}}\to a_{x_0x_1}\quad(x_{i+r+1}=x_0,r>0).$$

定义 $y\in\Sigma_k$, 使得

$$y_m=\begin{cases}x_m, & \text{如果 } 0\leqslant m\leqslant i+r,\\ x_{m-(i+r+1)}, & \text{如果 } m\geqslant i+r.\end{cases}$$

据命题 3.2.21, 易见, $y\in\Lambda_A$, 且

$$y\in{}_0[x_0\cdots x_N]_A,\quad\sigma_A^{i+r+1}(y)\in{}_0[x_0\cdots x_N]_A.$$

这证明

$$\sigma_A^{i+r+1}({}_0[x_0\cdots x_N]_A)\cap_0[x_0\cdots x_N]_A\neq\varnothing,$$

即

$$x\in\Omega(\sigma_A).$$ □

有限型子转移的不变闭子集或子系统当然不一定仍是有限型的 (注意, 转移自映射本身是有限型的). 这又引出一个问题, 即有限型子转移的非游荡集仍是有限型的? 在回答这个问题之前, 我们先证明

命题 3.2.28 设 $0\leqslant i,j<k,n>0$, 则

$$\begin{aligned}a_{ij}^{(n)}&=\sharp(\{(i_0\cdots i_n)|(i_0\cdots i_n)\text{ 是可允许的, }i_0=i,i_n=j\})\\&=\sharp(\{a_{i_0i_1}\to\cdots\to a_{i_{n-1}i_n}|i_0=i,i_n=j\}),\end{aligned}$$

即 $a_{ij}^{(n)}$ 是连接 A 的第 i 行上 $G(A)$ 的顶点到 A 的第 j 列上 $G(A)$ 的顶点的长度为 $n+1$ 的全部有向路径的基数.

证明 当 $n=1$ 时, 结论是明显的. 设对 $n-1$ 时结论已成立. 由矩阵乘法, 有

$$a_{ij}^{(n)}=(a_{i_0}^{(n-1)}a_{i_1}^{(n-1)}\cdots a_{i_{k-1}}^{(n-1)})(a_{0j}a_{1j}\cdots a_{k-1j})^{\mathrm{T}}=\sum_{l=0}^{k-1}a_{il}^{n-1}a_{lj}.$$

据归纳法假设, $a_{il}^{(n-1)}$ 是可允许 n 序列集合 $\{(i\cdots l)\}$ 的基数, 因此 $a_{ij}^{(n)}$ 是可允许集合 $\{(i\cdots j)\}$ 的基数. □

命题 3.2.29 $A=(a_{ij})$ 不可约, 当且仅当 $G(A)$ 有一条闭路过所有顶点.

证明 设 $A=(a_{ij})$ 不可约. 设 a_{ij} 和 a_{lm} 是 $G(A)$ 的任意两个顶点 $(0\leqslant i,j,l,m<k)$. 显然, 为证明必要性, 只需证明存在从 a_{ij} 到 a_{lm} 的有向路径即可. 据不可约性, 存在 $n>0$, 使 $a_{jl}^{(n)}>0$. 据命题 3.2.28, 存在可允许 $n+1$ 序列 $(j\cdots l)$. 显然, $(ij\cdots lm)$ 是可允许的 $n+3$ 序列. 因此

$$a_{ij}\to\cdots\to a_{lm}$$

是 $G(A)$ 的从顶点 a_{ij} 到顶点 a_{lm} 的有向路径.

下面证明充分性部分. 设 $0\leqslant i,j<k$. 由关于 $A=(a_{ij})$ 的假设, 存在 $0\leqslant l,m<k$, 使 a_{il},a_{mj} 是 $G(A)$ 的两个顶点. 据假设, 存在从 a_{il} 到 a_{mj} 的有向路径, 因此存在可允许序列 $(il\cdots mj)$, 设其长度为 $n>4$. 据命题 3.2.28, $a_{ij}^{(n-1)}>0$, 即 $A=(a_{ij})$ 不可约. □

下面对 $A=(a_{ij})$ 决定的有限型子转移作进一步分析. 设 $A=(a_{ij})$ 已是标准形, 即

$$A=\begin{pmatrix} A_{k_1} & & & \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k_r} \\ A_{k_{r+1}k_1} & \cdots & A_{k_{r+1}k_r} & A_{k_{r+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{k_sk_1} & \cdots & A_{k_sk_{s-1}} & A_{k_s} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{k1},\cdots,A_{ks}$ 是对应阶的 $\{0,1\}$ 不可约方阵, $k_1+k_2+\cdots+k_s=k$.

对应 $A=(a_{ij})$, 状态空间 $S=\{0,1,\cdots,k-1\}$ 被分解成不相交 s 组子集:

$$\{0,1,\cdots,k_1-1\},$$

$$\{k_1,k_1+1,\cdots,k_1+k_2-1\},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\{k_1+k_2+\cdots+k_{s-1},\cdots,k_1+k_2+\cdots+k_s-1\}.$$

$k_l\times k_l$ 阶 $\{0,1\}$ 方阵 $A_{kl}(0<l\leqslant s)$ 在由符号

$$\{k_1+k_2+\cdots+k_{l-1},\cdots,k_1+\cdots+k_l-1\}$$

构成的 k_l 阶符号空间上决定一个有限型子转移

$$\sigma_{A_{kl}}:\Lambda_{A_{kl}}\to\Lambda_{A_{kl}}.$$

以一种明显方式, $\sigma_{A_{kl}}$ 可以看作是 σ_A 的子转移 (即把 $k_l\times k_l$ 阶 $\{0,1\}$ 方阵 A_{kl} 与 $k\times k$-$\{0,1\}$ 方阵

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & A_{k_l} & \\ \vdots & & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

等同起来, 而这个方阵是由把 $A=(a_{ij})$ 的标准型中除 A_{kl} 外均变成 0 而得到. 在这个意义下, $\Lambda_{A_{kl}}$ 自然成了 Λ_A 的不变闭子集). 易见

$$\bigcup_{0\leqslant l\leqslant s}\Lambda_{A_{kl}}\subset\Lambda_A.$$

命题 3.2.30 符号同上, 则

$$\bigcup_{0\leqslant l\leqslant s}\Lambda_{A_{kl}}=\Lambda_A,$$

当且仅当 A 的标准型是对角型的,

$$A=\begin{pmatrix} A_{k_1} & & & \\ 0 & A_{k_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k_s} \end{pmatrix}$$

即在 $A=(a_{ij})$ 的标准型中, $r=s$.

证明 先证必要性. 设 $A=(a_{ij})$ 的标准型不是对角型的, 即存在 $r<l\leqslant s$, 使得 $A_{k_lk_i}\neq 0$, 其中 $1\leqslant i<l$. 在 $A_{k_lk_i}$ 上任取 $G(A)$ 的一个顶点, 它决定了一个 2 相对柱形. 明显地, 决定这个柱形的两个符号不在上述状态空间 $S=\{0,1,\cdots,k-1\}$ 的不相交分解的同一组内. 因此, 这个 2 相对柱形与每一个 Λ_{kl} 的交集都是空集. 这明显蕴涵

$$\bigcup_{0\leqslant l\leqslant s}\Lambda_{A_{kl}}\subsetneqq\Lambda_A,$$

与假设矛盾. 必要性证毕.

下面证明充分性. Λ_A 显然等于所有 2 相对柱形的并集, 但每一个 2 相对柱形由 $G(A)$ 的一个顶点决定, 而当这个顶点位于 $A_{kl}(0<l\leqslant s)$ 内时, 它所决定的 2 相对柱形明显地包含在 $\Lambda_{A_{kl}}$ 内. 这蕴涵

$$\bigcup_{0\leqslant l\leqslant s}\Lambda_{A_{kl}}\supset\Lambda_A.$$

充分性获证. □

有了上述准备之后, 就可以回答前面提出的问题了.

命题 3.2.31 有限型子转移 σ_A 的非游荡集 $\Omega(\sigma_A)$ 是有限型的, 且

$$\Omega(\sigma_A)=\bigcup_{0\leqslant l\leqslant s}\Lambda_{A_{kl}}.$$

证明 设 $x\in\Lambda_A$. 假设有向图 $G(A)$ 的顶点 $a_{x_0x_1}$ 不在 $A_{kl}(0<l\leqslant s)$ 内. 从 $G(A)$ 的有向弧的定义和 $A=(a_{ij})$ 的下三角标准型结构, 不难看出, 从 $a_{x_0x_1}$ 出发的 $G(A)$ 的任意有向路径不能再回到 $a_{x_0x_1}$, 即在 $G(A)$ 内无闭路含顶点 $a_{x_0x_1}$. 据命题 3.2.27 (3) 可知, $x\notin\Omega(\sigma_A)$.

再设 $a_{x_0x_1}$ 在某个 $A_{kl}(0 < l \leqslant s)$ 内, 但对某个 $i > 0, a_{x_ix_{i+1}}$ 不再在任一个 $A_{kl}(0 < l \leqslant s)$ 内. 根据上面的证明, 有

$$\sigma^i(x) = (x_ix_{i+1}\cdots) \notin \Omega(\sigma_A).$$

因为非游荡集 $\Omega(\sigma_A)$ 是对 σ_A 不变的, 这蕴涵

$$x \notin \Omega(\sigma_A).$$

余下的情况是, 所有顶点 $a_{x_ix_{i+1}}(i \geqslant 0)$ 总是在 $A_{kl}(0 < l \leqslant s)$. 在这种情况下, 易由有向弧的定义看出, 若 $a_{x_0x_1}$ 在 A_{kl}, 则 $a_{x_ix_{i+1}}(\forall i \geqslant 0)$ 也总是在 A_{kl}. 这明显地蕴涵 $x \in \Lambda_{A_{kl}}$. 因为 A_{kl} 不可约, 据命题 3.2.29, 易于看出, 对任意 $i > 0$, 存在从 $a_{x_ix_{i+1}}$ 到 $a_{x_0x_1}$ 的有向路径. 据命题 3.2.27 的 (3), 有

$$x \in \Omega(\sigma_A).$$

上面事实上证明了

$$\Omega(\sigma_A) \supset \bigcup_{0<l\leqslant s} \Lambda_{A_{kl}}.$$

据命题 3.2.27, 易于得到

$$\Omega(\sigma_A) = \bigcup_{0<l\leqslant s} \Lambda_{A_{kl}}.$$

显然, $\Omega(\sigma_A)$ 是由 $\{0,1\}$ 方阵

$$A = \begin{pmatrix} A_{k_1} & & & \\ 0 & A_{k_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k_s} \end{pmatrix}$$

按命题 3.2.16 的方式决定的对 σ 不变的闭子集, 因此是有限型的. □

值得注意的是, 有限型子转移的点的 ω 极限集不一定是有限型的.

命题 3.2.32　$\Omega(\sigma_A) = \Lambda_A \Leftrightarrow G(A)$*的每一顶点都有闭路通过.*

证明　设 $\Omega(\sigma_A) = \Lambda_A$. 据命题 3.2.30 和 3.2.31, A 的标准型为对角型的,

$$A = \begin{pmatrix} A_{k_1} & & & \\ 0 & A_{k_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k_s} \end{pmatrix},$$

即在 $A=(_{ij})$ 的标准型中 $r=s$, 其中 $A_{k_i}(0<i\leqslant s)$ 是不可约的. 显然, $G(A)$ 的顶点是某一个 $G(A_{k_i})$ 的顶点, 而据命题 3.2.29, $G(A_{k_i})$ 的每一个顶点都有 $G(A_{k_i})$ 的, 因而也是 $G(A)$ 的顶点经过. 这证明必要性.

下面证明充分性. 设

$$A=\begin{pmatrix} A_{k_1} & & & \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k_r} \\ A_{k_{r+1}k_1} & \cdots & A_{k_{r+1}k_r} & A_{k_{r+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{k_sk_1} & \cdots & A_{k_sk_{s-1}} & A_{k_s} \end{pmatrix}$$

且存在 $r<l\leqslant s, 0\leqslant i<l$, 使

$$A_{k_lk_i}\neq \mathbf{0},$$

即为非零矩阵. 设 $x\in\Lambda_A$, 使 $a_{x_0x_1}$ 在 $A_{k_lk_i}$ 内. 利用命题 3.2.31 证明中使用的方法, 可以证明, 不存在 $G(A)$ 的闭路经过顶点 $a_{x_0x_1}$. 因此这样的 $A_{k_lk_i}$ 不存在, 即

$$A=\begin{pmatrix} A_{k_1} & & & \\ 0 & A_{k_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k_s} \end{pmatrix},$$

其中 A_{kl} 是不可约的. 据命题 3.2.31,

$$\Omega(\sigma_A)=\Lambda_A.$$

□

命题 3.2.33 $\overline{P(\sigma_A)}=\Omega(\sigma_A)$, *即周期点集在非游荡集内稠密.*

证明 $\overline{P(\sigma_A)}\subset\Omega(\sigma_A)$ 是明显的. 下面证明 $\overline{P(\sigma_A)}\supset\Omega(\sigma_A)$.

设 $x\in\Omega(\sigma_A)$. 据命题 3.2.27 (3), 对任意的 $i>0$, 存在 $G(A)$ 的闭路

$$a_{x_0x_1}\to a_{x_1x_2}\to\cdots\to a_{x_{i+1}x_0}.$$

因此 $(x_0x_1\cdots x_{i+1})$ 是可允许序列. 由这个可允许序列作循环节生成的 σ_A 的周期点记为 p_i, 易见, $p_i\to x(i\to\infty)$, 因此 $\overline{P(\sigma_A)}\supset\Omega(\sigma_A)$. □

下面讨论有限型子转移的与回复性有关的问题.

命题 3.2.34　下述条件等价:

(1) σ_A 拓扑传递;

(2) $G(A)$ 有一条闭路过所有顶点;

(3) A 是不可约的;

(4) 对任意 $0 \leqslant i, j < k$, 存在 $n > 0$, 使

$$\{x \in \Lambda_A | x_0 = i, x_n = j\} \neq \varnothing.$$

证明　(1) $\Rightarrow$ (2) 设 $x \in \Lambda_A$, 使 $\overline{\mathrm{orb}(x)} = \Lambda_A$. 显然, 只需证明, 从 $a_{x_0x_1}$ 到 $G(A)$ 的任意顶点 $a_{ij}(0 \leqslant i, j < k)$ 存在闭路即可. 设 $y = (ijy_2 \cdots) \in \Lambda_A$. 据假设, 存在 $m_1 > m_2 > 0$, 使得

$$\rho(\sigma_A^{m_2}(x), y) < \frac{1}{2}, \quad \rho(\sigma_A^{m_1}(x), x) < \frac{1}{2}.$$

据度量 ρ 的定义, 易见

$$x_{m_2} = i, \quad x_{m_2+1} = j, \quad x_{m_1} = x_0, \quad x_{m_1+1} = x_1.$$

因此

$$a_{x_0x_1} \to a_{x_1x_2} \to \cdots \to a_{x_{m_2}x_{m_2+1}} \to \cdots \to a_{x_{m_1}x_{m_1+1}} = a_{x_0x_1}$$

是经过 $a_{x_0x_1}$ 和 a_{ij} 的闭路.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) 见命题 3.2.29.

(3) $\Rightarrow$ (4) 是命题 3.2.28 的简单推论.

(4) $\Rightarrow$ (1) 设 ${}_0[i_0 \cdots i_n]_A$, ${}_0[j_0 \cdots j_m]_A (n > 0,\ m > 0)$ 是任意两个相对柱形, 据 (4), 存在可允许序列 $(i_n l_1 l_2 \cdots l_h j_0)$, 其中 $h > 0$. 显然,

$${}_0[i_0 \cdots i_n l_1 \cdots l_h j_0 \cdots j_m]_A \subset_0 [i_0 \cdots i_n]_A,$$

故

$$\sigma_A^{n+h+1}({}_0[i_0 \cdots i_n l_1 \cdots l_h j_0 \cdots j_m]_A) =_0 [j_0 \cdots j_m]_A \subset \sigma_A^{n+h+1}({}_0[i_0 \cdots i_n]_A).$$

据命题 3.2.27, σ_A 是拓扑传递的. □

推论 3.2.35　σ_A 是拓扑传递的当且仅当存在可允许循环节包含全部 k 个符号.

证明　先证必要性. 据命题 3.2.34 (2), 设 P 是 $G(A)$ 的过所有顶点的闭路. 因为 $A = (a_{ij})$ 的每一行和每一列均不全为零, 显然, $A = (a_{ij})$ 的每一行和每一列均有 $G(A)$ 的顶点. 这明显蕴涵 P 的顶点中包含全部 k 个符号.

充分性是明显的, 因为 σ_A 有可允许循环节包含全部 k 个符号蕴涵命题 3.2.34 的 (4). □

容易举例说明, 存在包含全部符号的可允许循环节不等价存在包含全部符号的可允许序列.

命题 3.2.36 下述条件等价:

(1) σ_A 是极小的;

(2) Λ_A 有限, 且 σ_A 是拓扑传递的;

(3) $P(\sigma_A)=\Lambda_A$ 由 σ_A 的一条周期轨道构成;

(4) $G(A)$ 只有一条不可约闭路, 它过 $G(A)$ 的全部顶点;

(5) A 的每一行和每一列都只有一个元素不为零, 且它们都不在 A 的对角线上.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) σ_A 的极小性蕴涵 $\Omega(\sigma_A)=\Lambda_A$. 易证明

$$\varnothing\neq\overline{P(\sigma_A)}=\Omega(\sigma_A)=\Lambda_A.$$

若 Λ_A 无限, 从而 $P(\sigma_A)$ 亦无限, σ_A 就不可能是极小的. 这证明 Λ_A 有限, σ_A 的拓扑传递性是明显的.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 Λ_A 有限, 但 $P(\sigma_A)\neq\Lambda_A$ 或 $P(\sigma_A)=\Lambda_A$ 但至少包含 σ_A 的两条不同周期轨道, 都明显蕴涵 σ_A 不可能是拓扑传递的, 均矛盾.

(3) $\Rightarrow$ (4) 显然, σ_A 的周期轨道唯一性决定 $G(A)$ 的唯一不可约闭路, 而这个不可约唯一闭路一定过所有顶点.

(4) $\Rightarrow$ (5) 易见

$$a_{ii}=0,\quad \forall 0\leqslant i<k.$$

否则, 对某个 $0\leqslant i<k$, $a_{ii}=1$, 则

$$a_{ii}\to a_{ii}$$

是一条闭路, 而且是不可约的, 这与 (4) 矛盾.

设 $A=(a_{ij})$ 的第 i 行有两个元素不为零, 即

$$a_{ij}=1,\quad a_{il}=1,\quad 0\leqslant i,\ j,\ l<k,\quad i\neq j,\ i\neq l,\ j\neq l.$$

据关于 $A=(a_{ij})$ 的假设, 存在 $0\leqslant h<k$, 使得 $a_{hi}=1$. 所以

$$a_{hi}\to a_{ij},\quad a_{hi}\to a_{il}$$

是 $G(A)$ 的两个不同的有向弧. 易于证明, 这将导致 $G(A)$ 有不同不可约闭路, 矛盾.

(5) ⇒ (1) 在假设条件下, 易于看出, 如果不计循环次序的话, 存在唯一的可允许 k 循环节, 它是可允许周期节且是不可约的. 由这个 k 可允许不可约周期节生成 σ_A 的唯一周期轨道中的 k 个不同点构成 Λ_A, 因此 σ_A 是极小的. □

推论 3.2.37　极小的有限型子转移有零拓扑熵.

这是极小有限型子转移底空间有限的简单推论.

有限型子转移与非有限型子转移在动力性状上大相径庭, 上述推论就是一个重要不同, 即一般子转移可以有正拓扑熵[24].

命题 3.2.38　若 σ_A 非极小拓扑传递, 则 $P(\sigma_A)$ 是无限非闭集合.

证明　设 σ_A 非极小拓扑传递, 则存在 $x \in \Lambda_A$, 使

$$\omega(x, \sigma_A) = \Lambda_A = \Omega(\sigma_A).$$

据命题 1.4.6, $\omega(x, \sigma_A)$ 是不可数的. 又据命题 3.2.33,

$$\overline{P(\sigma_A)} = \Omega(\sigma_A) = \Lambda_A.$$

因此 $P(\sigma_A)$ 是无限的. $P(\sigma_A)$ 的非闭性是明显的, 因为 $P(\sigma_A)$ 是可数的, 但 $\overline{P(\sigma_A)}$ 不可数, 因而

$$P(\sigma_A) \neq \overline{P(\sigma_A)}.$$ □

命题 3.2.39　若 σ_A 是非极小的拓扑传递的, 则

$$P(\sigma_A) \subsetneqq \Omega(\sigma_A) \cap EP(\sigma_A),$$

且 $\Omega(\sigma_A)$ 不可数, 其中 $EP(\sigma_A)$ 是 σ_A 的终于周期点集.

证明　设 σ_A 是非极小拓扑传递的. 我们断言: $A = (a_{ij})$ 中至少含有 $k+1$ 个不为零的元素. 用反证明法证明之. 设 $A = (a_{ij})$ 中只有 k 个不为零元素 (据关于 A 的假设, A 的不为零元素不能少于 k 个). 因为 σ_A 不是极小的, 据命题 3.2.36, 其中某个不为零的元素位于 A 的主对角线上. 易见, 由这个非零元素所决定的 $G(A)$ 的顶点是孤立的, 即既无有向弧由它通向不同于它的其他的顶点, 也无有向弧由不同于它的其他顶点通向它. 这明显蕴涵 $G(A)$ 无闭路通过所有顶点, 与命题 3.2.34 (2) 矛盾. 断言得证, 即 $A = (a_{ij})$ 至少有一列含有两个非零元素, 即存在

$$a_{i_0 j} = 1, \quad a_{i_1 j} = 1, \quad 0 \leqslant i_0 < i < k, \quad 0 \leqslant j < k.$$

据推论 3.2.35 , 可设 $(j \cdots l)$ 是包含全部 k 个符号的可允许循环节. 易见

$$(i_0 j \cdots l j \cdots l \cdots) \in \Lambda_A, \quad (i j \cdots l j \cdots l \cdots) \in \Lambda_A,$$

且其中至少一个是 σ_A 的非周期终于周期点. 因为 σ_A 拓扑传递, 据命题 3.2.32 和 3.2.34, 有

$$\Lambda_A = \Omega(\sigma_A),$$

这就证明了

$$P(\sigma_A) \subsetneqq \Omega(\sigma_A) \cap EP(\sigma_A).$$

显然, $P(\sigma_A) \subsetneqq \Omega(\sigma_A)$. 由 σ_A 的拓扑传递性, 存在 $x \in R(\sigma_A) - EP(\sigma_A)$, 使

$$\omega(x, \sigma_A) = \Lambda_A = \Omega(\sigma_A).$$

故据命题 1.4.6, $\Omega(\sigma_A)$ 不可数. □

极小的有限型子转移有有限的周期点集, 反过来当然不一定成立. 下面命题全面描述了具有有限周期点集的有限型子转移.

命题 3.2.40 设 $a = (a_{ij})$ 已是标准型 (见命题 3.1.17), 则下述条件等价:

(1) $P(\sigma_A)$ 有限;

(2) $P(\sigma_A) = \Omega(\sigma_A)$;

(3) $\Omega(\sigma_A) = R(\sigma_A)$;

(4) $R(\sigma_A) = P(\sigma_A)$;

(5) $R(\sigma_A)$ 有限;

(6) $\Omega(\sigma_A)$ 有限;

(7) Λ_A 可数;

(8) $\Omega(\sigma_A) \cap EP(\sigma_A) = P(\sigma_A)$;

(9) $\Lambda_A = EP(\sigma_A)$;

(10) $\sigma_{A_{kl}}, 0 < l \leqslant s$ 都是极小的.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 据命题 3.2.33, $P(\sigma_A) = \overline{P(\sigma_A)} = \Omega(\sigma_A)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) 因为 $P(\sigma_A) \subset R(\sigma_A) \subset \Omega(\sigma_A)$, 显然 $\Omega(\sigma_A) = R(\sigma_A)$.

(3) $\Rightarrow$ (4) 若 $x \in R(\sigma_A) - P(\sigma_A)$, 则据命题 1.4.6, $\omega(x, \sigma_A)$ 不可数, 因而 $\Omega(\sigma_A)$ 也不可数. 据命题 3.2.31 和命题 3.2.36 (3), 至少存在一个 $l, 0 < l \leqslant s$, 使 $\sigma_{A_{kl}}$ 是拓扑传递但非极小的, 不失普遍性, 可设 σ_A 拓扑传递但非极小, 用命题 3.2.39 的证明方法可以证明 σ_A 有非周期的终于周期点, 而这种点是 σ_A 的非游荡点, 但不是回复点. 这导致

$$\Omega(\sigma_A) \supsetneqq R(\sigma_A)$$

的矛盾, 因此

$$P(\sigma_A) = R(\sigma_A).$$

(4) $\Rightarrow$ (5) 若 $R(\sigma_A)$ 无限, 则 $\Omega(\sigma_A)$ 亦无限. 据命题 3.2.33, $P(\sigma_A)$ 亦无限, 据命题 3.2.31 和命题 3.2.29, 至少存在一个 $l, 0 < l \leqslant s$, 使 $\sigma_{A_{kl}}$ 是拓扑传递但非极小

的. 这明显蕴涵 $R(\sigma_{A_{kl}}) \supsetneqq P(\sigma_{A_{kl}})$, 因而 $R(\sigma_A) \supsetneqq P(\sigma_A)$. 这与 (4) 矛盾, 故 $R(\sigma_A)$ 有限.

(5) ⇒ (6) 据命题 3.2.33, $\overline{P(\sigma_A)} = \overline{R(\sigma_A)} = \Omega(\sigma_A)$, 故 $\Omega(\sigma_A)$ 无限蕴涵 $R(\sigma_A)$ 亦无限.

(6) ⇒ (7) 据命题 3.2.31,

$$\Omega(\sigma_A) = \bigcup_{0<l\leqslant s} \Lambda_{A_{kl}},$$

因此, $\Omega(\sigma_A)$ 有限蕴涵每一个 $\Lambda_{A_{kl}}$ 有限. 因为每一个 A_{kl} 都是不可约的, 因而 $\sigma_{A_{kl}}$ 都是拓扑传递的, 据命题 3.2.36, 每一个 $\Lambda_{A_{kl}}$ 都由 σ_A 的一条周期轨道构成. 从 $A = (a_{ij})$ 的下三角的标准型易见, $G(A)$ 的每一条有向路径在有限步都进入某个 $G(A_{kl})$ 内不再出来. 由此易见, Λ_A 的每一点都是 σ_A 的终于周期点. 注意到 σ 是 k 对 1 的, 终于周期点集的可数性是显而易见的.

(7) ⇒ (8) Λ_A 可数性蕴涵每一个 $\sigma_{A_{kl}}$ 都是极小的. 据命题 3.2.31 和命题 3.2.36, 有

$$\Omega(\sigma_A) = \bigcup_{0<l\leqslant s} \Lambda_{A_{kl}} = \bigcup_{0<l\leqslant s} P(\sigma_{A_{kl}}) = P(\sigma_A).$$

因此

$$\Omega(\sigma_A) \cap EP(\sigma_A) = P(\sigma_A).$$

(8) ⇒ (9) 据命题 3.2.39, 每一个 $\sigma_{A_{kl}}$ 都是极小的. 再据命题 3.2.36, 每一个 $\Lambda_{A_{kl}}$ 都是由 σ_A 的一条周期轨道构成的. 因此, $P(\sigma_A)$ 是有限集. 同 (6) ⇒ (7) 的证明一样, 易证 Λ_A 中每一点都是 σ_A 的终于周期点.

(9) ⇒ (10) 设对某个 l, $0 < l \leqslant s$, $\sigma_{A_{kl}}$ 不是极小的, 据命题 3.2.39, $\Omega(\sigma_{A_{kl}}) \subset \Omega(\sigma_A)$ 不可数. 但 $EP(\sigma_A)$ 总是可数的, 导致矛盾, 因此, 每一个 $\sigma_{A_{kl}}$ 都是极小的.

(10) ⇒ (1) 据命题 3.2.36, 每一个 $P(\sigma_{A_{kl}})$ 都由 σ_A 的一条周期轨道构成, 因而有限. 又 $P(\sigma_A) = \bigcup_{0<l\leqslant s} P(\sigma_{A_{kl}})$, 故 $P(\sigma_A)$ 亦有限. □

3.2.6 有限型子转移的拓扑熵与混沌

假设同上.

命题 3.2.41 *$\sigma : \Sigma_k \to \Sigma_k$ 是扩张映射.*

证明 易于由定义直接证明. 下面通过构造一个生成子给出证明.

记

$$A_i = \{x \in \Sigma_k | x_0 = i\}, \quad i = 0, 1, \cdots, k-1.$$

易见 $\alpha = \{A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}\}$ 是 Σ_k 的一个开覆盖. 又易见

$$\sigma^{-n}(A_i) = \{x \in \Sigma_k | x_n = i\}, \quad i = 0, 1, \cdots, k-1.$$

设 $\{A_{i_n}\}_{n=0}^{\infty}$ 是 α 的元素的任一序列. 容易看出

$$\bigcap_{n=0}^{\infty}\sigma^{-n}(A_{i_n})=\{(i_0i_1\cdots)\}.$$

据定义 α 是 σ 的一个生成子 (注意, $\overline{A_i}=A_i, i=0,1,\cdots,k-1$). □

这个生成子叫做 σ 的 "自然生成子".

推论 3.2.42 *σ_A 亦可扩, 且*

$$\alpha_\Lambda=\{A_0\cap\Lambda,\cdots,A_{k-1}\cap\Lambda\}$$

是 σ_Λ 的生成子.

证明从略.

下面设 $\Lambda\in L(\Sigma_k)$, 即 $\sigma(\Lambda)\subset\Lambda$. α 同上. 记

$$\begin{aligned}Q_n(\Lambda)&=\sharp(\{(i_0i_1\cdots i_{n-1})|\exists x\in\Lambda,\text{ 使 } x_0=i_0\cdots x_{n-1}=i_{n-1}\})\\&=\sharp(\{(i_0i_1\cdots i_{n-1})|_0[i_0\cdots i_{n-1}]_\Lambda\neq\varnothing\}).\end{aligned}$$

命题 3.2.43 $\operatorname{ent}(\sigma_\Lambda)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log Q_n(\Lambda)$.

证明 设 $n\geqslant 0$. 从上面定义, 有

$${}_0[i_0\cdots i_{n-1}]_\Lambda\neq\varnothing\Leftrightarrow A_{i_0}\cap\sigma_\Lambda^{-1}(A_{i_1})\cap\cdots\cap\sigma_\Lambda^{-(n-1)}(A_{i_{n-1}})\neq\varnothing,$$

而且, 若 $x\in_0[i_0\cdots i_{n-1}]_\Lambda$, 则

$$A_{i_0}\cap\sigma_\Lambda^{-1}(A_{i_1})\cap\cdots\cap\sigma_\Lambda^{-(n-1)}(A_{i_{n-1}})$$

是

$$\alpha_\Lambda\cap\sigma_\Lambda^{-1}(\alpha_\Lambda)\cap\cdots\cap\sigma_\Lambda^{-(n-1)}(\alpha_\Lambda)$$

中的唯一包含 x 的元素. 因此

$$Q_n(\Lambda)=N(\vee_{i=0}^{n-1}\sigma_\Lambda^{-i}(\alpha_\Lambda)),$$

从而

$$\log Q_n(\Lambda)=\log N(\vee_{i=0}^{n-1}\sigma_\Lambda^{-i}(\alpha_\Lambda))=H(\vee_{i=0}^{n-1}\sigma_\Lambda^{-i}(\alpha_\Lambda)).$$

据文献 [52] 命题 14, 有

$$\begin{aligned}\operatorname{ent}(\sigma_\Lambda)=\operatorname{ent}(\sigma_\Lambda,\alpha_\Lambda)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\vee_{i=0}^{n-1}\sigma_\Lambda^{-i}(\alpha_\Lambda))\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n(\Lambda).\end{aligned}$$ □

注意, 上述命题对所有 σ 的子系统成立.

下面设 $A=(a_{ij})$ 是 $\{0,1\}$ 方阵.

命题 3.2.44　$\operatorname{ent}(\sigma_A) = \log \rho(A)$, 其中 $\rho(A)$ 是 A 的谱半径.

证明　设 $n \geqslant 0$. 据命题 3.2.28,

$$\{x \in \Lambda_A | x_0 = i_0, \cdots, x_{n-1} = i_{n-1}\} \neq \varnothing$$

当且仅当

$$a_{i_0 i_1} \to a_{i_1 i_2} \to \cdots \to a_{i_{n-2} i_{n-1}}$$

是 $G(A)$ 的有向路径, 当且仅当

$$a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{n-2} i_{n-1}} = 1.$$

因此

$$Q_n(\Lambda_A) = \sum_{i_0, \cdots, i_{n-1}=0}^{k-1} a_{i_0 i_1} \cdots a_{i_{n-2} i_{n-1}} = \sum_{i_0, i_{n-1}}^{k-1} a_{i_0 i_{n-1}}^{(n-1)}.$$

在 $k \times k$ 阶方阵集合 M_k 上定义模

$$\|B\| = \sum_{i,j=0}^{k-1} |b_{ij}|, \quad \forall B = (b_{ij}) \in M_k,$$

则

$$Q_n(\Lambda_A) = \|A^{n-1}\|.$$

据命题 3.2.43 和命题 3.2.1, 有

$$\begin{aligned}\operatorname{ent}(\sigma_A) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Q_n(\Lambda_A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{n-1}\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} \log \|A^{n-1}\|^{\frac{1}{n-1}} = \log \rho(A).\end{aligned}$$

□

推论 3.2.45　设 $A = (a_{ij})$ 已是标准型, 即

$$A = \begin{pmatrix} A_{k_1} & & & \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k_r} \\ A_{k_{r+1}k_1} & \cdots & A_{k_{r+1}k_r} & A_{k_{r+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{k_s k_1} & \cdots & A_{k_s k_{s-1}} & A_{k_s} \end{pmatrix},$$

则

$$\operatorname{ent}(\sigma_A) = \max_{0<l\leqslant s} \{\operatorname{ent}(\sigma_{A_{k_l}})\}.$$

证明 显然, 特征多项式

$$|A-\lambda I_k| = |A_{k_1}-\lambda I_{k_1}|\cdots|A_{k_s}-\lambda I_{k_s}|,$$

其中 $I_{k_1},\cdots,I_{k_s}$ 分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 阶单位方阵. 显然, A 的全体特征值的集合是 $A_{k_1},\cdots,A_{k_s}$ 的特征值的集合的并集, 故 A 的谱半径是某个 $A_{k_l}, 0<l\leqslant s$ 的特征值. □

定理 3.2.46 $\operatorname{ent}(\sigma_A)>0$ *当且仅当至少存在两个同长度且有公共符号的不同的可允许循环节.*

证明 据推论 3.2.45, 不失普遍性, 可设 A 是不可约的, 因而 σ_A 是拓扑传递的. 据推论 3.1.37, A 至少有一行, 例如第 i 行 $(0\leqslant i<k)$, 它上面至少有两个不为零的元素. 据命题 3.2.34, $G(A)$ 有一条闭路过所有顶点. 易见, 这蕴涵存在一个可允许循环节, 符号 i 在其内至少出现两次. 在符号 i 处可把这个可允许循环节分解成两个不同的可允许循环节, 它们都含有符号 i. 把这两个可允许循环节重复不同倍数, 使得到的两个新的可允许循环节长度相同. 显然, 它们仍然不同, 但都含有符号 i. 这证明必要性.

下面证明充分性. 设

$$(i_0i_1\cdots i_{r-1}),\quad (i_0i_1'\cdots i_{r-1}')$$

是两个长度为 $r\geqslant 2$ 的可允许循环节, 其中 $i_j\neq i_j', j=1,\cdots,r-1$ 至少一个成立. 容易看出, 在下面图表中

$$\begin{array}{llll}
 & & & \nearrow i_1\to\cdots \\
 & & \nearrow i_1\to\cdots\to i_{r-1}\to i_0 & \\
 & & & \searrow i_1'\to\cdots \\
 & \nearrow i_1\to\cdots\to i_{r-1}\to i_0 & & \\
 & & & \nearrow i_1\to\cdots \\
 & & \searrow i_1'\to\cdots\to i_{r-1}'\to i_0 & \\
 & & & \searrow i_1'\to\cdots \\
i_0 & & & \\
 & & & \nearrow i_1\to\cdots \\
 & & \nearrow i_1\to\cdots\to i_{r-1}\to i_0 & \\
 & & & \searrow i_1'\to\cdots \\
 & \searrow i_1'\to\cdots\to i_{r-1}'\to i_0 & & \\
 & & & \nearrow i_1\to\cdots \\
 & & \searrow i_1'\to\cdots\to i_{r-1}'\to i_0 & \\
 & & & \searrow i_1'\to\cdots
\end{array}$$

任何从 i_0 起沿箭头方向连续前进有限步得到的有限序列都是可允许的. 记这样得到的 n 序列的基数为 Q_n', 易由归纳证明

$$Q_{nr+j}'=2^{n+1},\quad j=2,3,\cdots,r+1,\quad \forall n\geqslant 0.$$

显然

$$Q_n'\leqslant Q_n(\Lambda_A),\quad \forall n\geqslant 0.$$

据命题 3.2.43, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{ent}(\sigma_A) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n(\Lambda_A) \geqslant \lim_{n\to\infty}\log Q'_n \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{nr+j}\log 2^{n+1} = \frac{1}{r}\log 2 > 0.\end{aligned}$$

□

命题 3.2.47　设 $A=(a_{ij})$ 不可约, 则 $\mathrm{ent}(\sigma_A)=0$ 当且仅当 σ_A 是极小的.

证明　必要性包含在命题 3.2.46 的证明中, 因为那里指出, 若 σ_A 非极小, 则至少存在两个有相同长度和有公共符号的不同的可允许循环节, 据命题 3.2.46, $\mathrm{ent}(\sigma_A)>0$, 矛盾.

充分性由推论 3.2.37 给出. □

下面用 N_n 表示不动点集 $F(\sigma_A^n)$ 的基数, $\forall n>0$.

命题 3.2.48　$\mathrm{ent}(\sigma_A)=\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log N_n$.

证明　据推论 3.2.45, 可设 $A=(a_{ij})$ 是不可约的, 因而 σ_A 是拓扑传递的.

先设 σ_A 是极小的. 据推论 3.2.37, $\mathrm{ent}(\sigma_A)=0$. 又据命题 3.2.36, Λ_A 有限, 因而 N_n 有限, $\forall n>0$. 显然 $\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log N_n=0$, 结论成立.

下设 σ_A 不是极小的. 据推论 3.2.35, 存在包含全部 k 个符号的可允许的循环节, 设其长度为 $M\geqslant k$. 因此, 对任意 $0\leqslant i,j<k$, 存在从 i 到 j 的可允许的有限序列, 其长度不超过 M. 这蕴涵, 对任意可允许 n 序列, 存在长度不超过 $n+M$ 的可允许循环节, 它的前 n 个符号构成的子序列等于给定的可允许 n 序列, 即每一个可允许 n 序列, 对应一个长度介于 n 和 $n+M$ 之间的可允许循环节, 而后者决定 σ_A 的一个周期不大于 $n+M$ 的周期点. 容易看出

$$\sum_{i=0}^{M}N_{n+i}\geqslant Q_n(\Lambda_A),\quad \forall n>0.$$

易见, 对每一个 $n>0$, 存在 $0<j\leqslant M$, 使得

$$M\cdot N_{n+j}=M\cdot\max_{0<i\leqslant M}N_{n+i}.$$

明显地, 存在一个固定的 $0<j\leqslant M$ 和递增序列 $\{n_l\}$ 使

$$M\cdot N_{n_l+j}=M\cdot\max_{0<i\leqslant M}N_{n_l+i},\quad \forall l>0.$$

于是有

$$M\cdot N_{n_l+j}\geqslant Q_{n_l}(\Lambda_A),\quad \forall l>0.$$

由此有

$$\begin{aligned}\operatorname{ent}(\sigma_A) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n(\Lambda_A) = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{n_l}(Q_{n_l}(\Lambda_A))\\ &\leqslant \limsup_{l\to\infty}\frac{1}{n_l}\log M\cdot N_{n_l+j}\\ &= \limsup_{l\to\infty}\frac{1}{n_l}\log N_{n_l+j} + \limsup_{l\to\infty}\frac{1}{n_l}\log M\\ &= \limsup_{l\to\infty}\frac{n_l+j}{n_l}\cdot\frac{1}{n_l+j}\log N_{n_l+j} \leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N_n.\end{aligned}$$

另外, 显然

$$N_n \leqslant Q_n(\Lambda_A), \quad \forall n > 0.$$

因此

$$\operatorname{ent}(\sigma_A) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n(\Lambda_A) \geqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N_n. \qquad \square$$

一般而言, 容易举例说明[57]

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N_n \neq \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N_n,$$

即极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N_n$ 不存在. 这是与全转移不同的地方, 因为很容易证明, 对全转移上述极限存在.

3.2.7 有限型子转移的混沌与混合性

假设同上.

有限型子转移 σ_A 的混沌性状同样为方阵 $A=(a_{ij})$ 决定, 而且, 当 σ_A 混沌时, 也与全转移一样, 存在较强的混沌集, 也存在与每一个点相联系的一般混沌集. 进而证明, 对有限型子转移而言, 正拓扑熵与混沌等价.

命题 3.2.49 设 $A=(a_{ij})$ 是不可约的. 则 σ_A 是混沌的当且仅当 σ_A 不是极小的.

证明 据命题 3.2.36, 若 σ_A 是极小的, 则 Λ_A 由 σ_A 的一条周期轨道构成, σ_A 当然不是混沌的.

下设 σ_A 非极小. 正如命题 3.2.46 所证明的那样, 存在两个长度相同并有公共符号的不同可允许循环节. 设它们是

$$P=(i_0i_1\cdots i_{r-1}), \quad Q=(i_0i_1'\cdots i_{r-1}'),$$

其中 $i_j\neq i_j', j=1,2,\cdots,r-1$ 至少一个成立. 构造 σ_A 的一个混沌集如下:

由可允许循环节 $P=(i_0i_1\cdots i_{r-1})$ 可生成 σ_A 的一个周期点

$$x=PP\cdots=(i_0i_1\cdots i_{r-1}i_0i_1\cdots i_{r-1}\cdots).$$

易见

$$\mathscr{E}=\{M_0M_1\cdots|M_i=P\text{ 或 }Q,\forall i\geqslant 0\}$$

是 Λ_A 的子集合. 对每一个实数 $\eta\in(0,1)$, 构造

$$x^\eta=M_0^\eta M_1^\eta\cdots\in\mathscr{E}$$

满足

$$M_i^\eta=P\Leftrightarrow\text{ 存在 }l\geqslant 0,\text{使得 }i=l^2\text{ 且 }[(l+1)\eta]-[l\eta]=1.$$

记 $C=\{x^\eta\in\Lambda_A|\eta\in(0,1)\}$.

设 $0<\theta<\eta<1$. 不难证明下述事实:

(a) $M^\theta_{l^2+j}=Q,j=1,\cdots,2l+1,\forall l\geqslant 0$;

(b) 存在无限多整数 $l>0$, 使 $M^\theta_{l^2}=P$;

(c) 存在无限多整数 $l>0$, 使 $M^\theta_{l^2}\neq M^\eta_{l^2}$.

易见, (c) 蕴涵

$$x^\theta\neq x^\eta.$$

因此 C 是不可数的. 同时, (c) 亦蕴涵

$$\limsup_{n\to\infty}\rho(\sigma_A^n(x^\theta),\sigma_A^n(x^\eta))>0,\quad\forall\theta,\eta\in(0,1),\quad\theta\neq\eta.$$

再者, (a) 明显蕴涵

$$\liminf_{n\to\infty}\rho(\sigma_A^n(x^\theta),\sigma_A^n(x^\eta))=0,\quad\forall\theta,\eta\in(0,1).$$

这就证明了 σ_A 是混沌的. □

下面两个推论的证明简单, 这里从略.

推论 3.2.50　设 A 已是标准型, 则 σ_A 是混沌的当且仅当某个 $\sigma_{A_{k_l}}$ 是混沌的, 当且仅当某个 $\sigma_{A_{k_l}}$ 不是极小的, $0<l\leqslant s$.

推论 3.2.51　σ_A 混沌当且仅当 σ_A 在非游荡集上混沌.

命题 3.2.52　σ_A 混沌当且仅当存在整数 $r>0$, 使得 σ_A^r 有一个子系统与 2 单边转移自映射拓扑共轭.

证明　设 σ_A 混沌. 据推论 3.2.50, 不失普遍性, 可设 $A=(a_{ij})$ 不可约. 据推论 3.2.50, σ_A 是拓扑传递的但不是极小的. 类似命题 3.2.49 证明中那样, 设

$$P=(i_0i_1\cdots i_{r-1}),\quad Q=(i_0i_1'\cdots i_{r-1}')$$

是两个同长度有公共符号的不同可允许循环节, 其中 $i_j \neq i'_j, j = 1, \cdots, r-1$ 至少一个成立. 同样, 记

$$\mathscr{E} = \{M_0 M_1 \cdots | M_i = P \text{ 或 } Q, \forall i \geqslant 0\}.$$

易见, $\mathscr{E}$ 是 Λ_A 的子集合, 且对 σ_A^r 不变. 于是

$$\sigma_A^r|_{\mathscr{E}} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$$

是 σ_A^r 的一个子系统. 我们可以把 P, Q 看作两个新的符号, $\mathscr{E}$ 可以看作由这两个符号构成的新的 2 单边符号空间, 而

$$\sigma_A^r|_{\mathscr{E}} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$$

恰好就是其上的转移自映射. 在这个意义上, 我们说 σ_A^r 有一个子系统与 2 单边转移自映射拓扑共轭. 这是必要性的证明.

充分性是明显的, 因为拓扑共轭保持混沌性状不变, 而 σ_A^r 的子系统的混沌集也是 σ_A^r 的混沌集, 也是 σ_A 的混沌集. □

推论 3.2.53 设 $A = (a_{ij})$ 已是标准型. 如果对某个 $0 < l \leqslant s$, $\sigma_{A_{k_l}}$ 是非极小的, 则下述结论成立:

(1) 存在 $r > 0, \sigma_A$ 有 rn 周期, $\forall n > 0$;

(2) 存在不可数混沌集 $C \subset \Lambda_A - P(\sigma_A), \sigma_A^r(C) \subset C$ 满足:

① $\limsup\limits_{n\to\infty} \rho(\sigma_A^n(x), \sigma_A^n(y)) \geqslant 1, \forall x, y \in C, x \neq y$;

② $\liminf\limits_{n\to\infty} \rho(\sigma_A^n(x), \sigma_A^n(y)) = 0, \forall x, y \in C$;

③ $\liminf\limits_{n\to\infty} \rho(\sigma_A^n(x), \sigma_A^n(p)) > 0, \forall x \in C, p \in P(\sigma_A) - \{e\}$, 其中 e 是 σ_A 的一个 r 周期点.

据前述诸命题, 证明从略.

综上诸命题, 可以得到下结论.

定理 3.2.54 下述条件等价:

(1) $\text{ent}(\sigma_A) > 0$;

(2) σ_A 的周期集合无限;

(3) σ_A 有周期大于 k;

(4) 存在可允许可约周期节;

(5) 存在有公共符号的不同的可允许周期节;

(6) 存在两个长度相同的不同可允许循环节, 它们有公共符号;

(7) σ_A 是混沌的;

(8) σ_A 有混沌点偶;

(9) 存在 $x \in \Lambda_A, \omega(x, \sigma_A)$ 不是一条周期轨道;

(10) 存在 $x \in \Lambda_A, \omega(x, \sigma_A)$ 无限;

(11) $G(A)$ 有两条不同不可约闭路过同一顶点.

综合前述诸命题, 容易给出证明, 从略.

如同拓扑熵和混沌一样, 混合性也是描述连续作用在底空间上引起的混乱程度或复杂性的一个概念. 我们希望比较它和正拓扑熵和混沌之间的强弱关系. 对有限型子转移而言, 这些问题已有完整的结果. 下面就来讨论这些问题. 我们将证明, 对有限型子转移而言, 强和弱拓扑混合性是一致的, 并给出一系列等价条件, 同时指出, 拓扑混合性比正拓扑熵和混沌强, 即前者蕴涵后者, 但反之不成立.

假设同上. 先证明几个辅助引理.

引理 3.2.55　设 $n_1, \cdots, n_i$ 是 $i (i \geqslant 2)$ 个正整数, 使得

$$d(n_1, \cdots, n_i) = d \geqslant 1,$$

则对任意正整数 c, 存在 i 个正整数 $x_1, \cdots, x_i$, 满足

$$d(n_1 + x_1 c, \cdots, n_i + x_i c) = d,$$

其中 $d(,)$ 表示最大公约数.

证明　据初等数论的一个基本定理, 存在正整数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_i$ 和 $0 < j < i$, 使得

$$\lambda_1 n_1 + \cdots + \lambda_j n_j + d = \lambda_{j+1} n_{j+1} + \cdots + \lambda_i n_i.$$

在这个等式两端分别加上 j 个 $\lambda_1 \cdots \lambda_i (i-j) c$ 和 $i-j$ 个 $\lambda_1 \cdots \lambda_i j c$, 规定 $\lambda_0 = \lambda_{i+1} = 1$, 令

$$x_l = \begin{cases} \lambda_1 \cdots \lambda_{l-1} \lambda_{l+1} \cdots \lambda_i (i-j) c, & \text{当 } l = 1, \cdots, j; \\ \lambda_1 \cdots \lambda_{l-1} \lambda_{l+1} \cdots \lambda_i j c, & \text{当 } l = j+1, \cdots, i, \end{cases}$$

整理后得

$$\lambda_1 (n_1 + x_1 c) + \cdots + \lambda_j (n_j + x_j c) + d = \lambda_{j+1} (n_{j+1} + x_{j+1} c) + \cdots + \lambda_i (n_i + x_i c).$$

因此

$$d(n_1 + x_1 c, \cdots, n_i + x_i c) = d. \qquad \square$$

引理 3.2.56　设 σ_A 是拓扑传递的. 若 $G(A)$ 有 $i \geqslant 2$ 个闭路 $P_1, \cdots, P_i$, 周期分别为 $n_1, \cdots, n_i$, 且 $d(n_1, \cdots, n_i) = d \geqslant 1$, 则 $G(A)$ 有 i 个闭路, 周期分别为 $m_1, \cdots, m_i$, 使得 $d(m_1, \cdots, m_i) = d$ 且这些闭路至少有一个公共顶点.

证明 据命题 3.2.34, $G(A)$ 有一条闭路过所有顶点, 记为 P, 其周期为 $c>0$. 据引理 3.2.55, 存在正整数 $x_1,\cdots,x_i$, 使

$$d(n_1+x_1c,\cdots,n_i+x_ic)=d.$$

P 与 $P_1,\cdots,P_i$ 均至少有一个公共顶点. 把 P 重复 x_i 次, 然后与 P_l 在它们的公共顶点处合成一个新的闭路, 记作 $x_lP\to P_l$, 其周期为 $n_l+x_lc(0<l\leqslant i)$. 显然, i 个闭路

$$x_1P\to P_1,\cdots,x_iP\to P_i$$

都过 $G(A)$ 的所有顶点, 当然至少有一个公共顶点, 且它们的周期有最大公约数 d. □

引理 3.2.57 *设 $c_1,\cdots,c_i$ 是 σ_A 的全部不同不可约周期 $(i>1)$, 如果 $d(c_1,\cdots,c_i)=d\geqslant 1$, 则每一个可允许循环节的长度以 d 为因子.*

证明 因为每一个可允许循环节都是由可允许不可约周期节生成的, 结论显然. □

引理 3.2.58 *假设同上引理. 设*

$$V(B,j)={}_0[b_0\cdots b_{j-1}]_A,\quad V(E,l)={}_0[e_0\cdots e_{l-1}]_A,$$

其中 $j\geqslant 1,l\geqslant 1$ 和 $b_0=e_0$, 则对任意 $n>0$,

$$\sigma_A^n(V(B,j))\cap V(E,l)\neq\varnothing$$

蕴涵 $d|n$, 即 d 整除 n.

证明 设

$$x=(x_0x_1\cdots)\in\sigma_A^n(V(B,j))\cap V(E,l),$$

即 $x\in V(E,l)$, 且存在

$$y=(y_0y_1\cdots)\in V(B,j),$$

使得

$$\sigma_A^n(y)=x.$$

易见

$$y_0=b_0=e_0=x_0=y_n.$$

因此 $(y_0y_1\cdots y_{n-1})$ 是可允许循环节. 据引理 3.2.57, 有 $d|n$. □

引理 3.2.59 设 σ_A 拓扑传递, 且 $G(A)$ 有两个周期分别为 n_1, n_2 的闭路, 使

$$d(n_1, n_2) = d \geqslant 1,$$

则 $G(A)$ 有两个周期分别为 m_1, m_2 的闭路, 它们有一个公共顶点, 且

$$d(m_1, m_2) = d.$$

证明 设

$$a_{b_0 b_1} \to a_{b_1 b_2} \to \cdots \to a_{b_{n_1-1} b_0}$$

和

$$a_{c_0 c_1} \to a_{c_1 c_2} \to \cdots \to a_{c_{n_2-1} c_0}$$

是 $G(A)$ 的两个闭路, 周期分别为 n_1, n_2. 设 a_{ij} 是 $G(A)$ 任意顶点. 据命题 3.2.34, 设

$$P = a_{ij} \to \cdots \to a_{sb_0} \to a_{b_0 b_1} \to a_{b_1 t} \to \cdots \to a_{uc_0} \to a_{c_0 c_1} \to a_{c_1 c_v} \to \cdots \to a_{ij}$$

是经过顶点 $a_{ij}, a_{b_0 b_1}, a_{c_0 c_1}$ 的一个闭路, 其中 $0 \leqslant s, t, u, v < k$. 记

$$P_1 = a_{ij} \to \cdots \to a_{sb_0}, \quad P_2 = a_{b_1 t} \to \cdots \to a_{ij}.$$

有

$$P = P_1 \to a_{b_0 b_1} \to P_2.$$

据引理 3.2.55, 存在正整数 λ, μ, 使

$$d(n_1 + \lambda c, n_2 + \mu c) = d.$$

易见, 闭路

$$\overbrace{PP \cdots P}^{\lambda-1} \to P_1 \to a_{b_0 b_1} \to a_{b_1 b_2} \to \cdots \to a_{b_{n_1-1} b_0} \to P_2$$

是过 a_{ij} 且周期为 $n_1 + \lambda c$. 类似地, 可得过 a_{ij} 周期为 $n_2 + \mu c$ 的闭路. □

推论 3.2.60 设 σ_A 拓扑传递且 $G(A)$ 有 $i (i > 1)$ 个闭路, 它们的周期以 d 为最大公因子. 则 $G(A)$ 有 i 个闭路, 它们的周期以 d 为最大公因子, 且它们至少有一个公共顶点.

证明类似, 从略.

推论 3.2.61 设 σ_A 拓扑传递, 且 $G(A)$ 有周期 m, n, 使

$$d(m,n) = d \geqslant 1,$$

则对任意符号 $i_0 \in S$, 存在两个可允许循环节

$$(i_0 i_1 \cdots i_{s-1}), \quad (i_0 i_1' \cdots i_{t-1}'),$$

使得 $d(s,t) = d$.

证明 因为 $A = (a_{ij})$ 的每一行和每一列都有不为零的元素, 故存在 $0 \leqslant l < k$, 使 $a_{i_0 l} = 1$, 即 $G(A)$ 的顶点. 由 σ_A 的周期分别为 m, n 的周期点可得 $G(A)$ 的两个周期分别为 m, n 的闭路. 据引理 3.2.59, 可得到 $G(A)$ 的两个闭路, 它们均过顶点 $a_{i_0 l}$ 且它们的周期以 d 为最大公因子. 易见, 这两个闭路所决定的可允许循环节即是所求. □

引理 3.2.62 设 $c_1, \cdots, c_i (i > 1)$ 为 σ_A 的全部不同不可约周期且 σ_A 拓扑传递, 则 $d(c_1, \cdots, c_i) = 1$ 蕴涵 σ_A 有周期 m, n, 使 $d(m,n) = 1$.

证明 据假设 $G(A)$ 有 i 个闭路, 周期分别为 $c_1, \cdots, c_i$, 据推论 3.2.60, $G(A)$ 有 i 个闭路, 周期分别为 $m_1, \cdots, m_i$, 它们至少有一个公共顶点, 且 $d(m_1, \cdots, m_i) = 1$. 这 i 个闭路决定了 i 个可允许循环节

$$P_1, \cdots, P_i,$$

它们的长度分别为 $m_1, \cdots, m_i$, 且它们均含有某个符号, 不失普遍性, 可设它们的第一个符号相同. 存在正整数 $x_1, \cdots, x_i$, 使得

$$x_1 m_1 + \cdots + x_i m_i = 1 + x_{j+1} m_{j+1} + \cdots + x_i m_i \quad (0 < j < i).$$

$G(A)$ 的闭路

$$\overbrace{P_1 \cdots P_1}^{x_1} \overbrace{P_2 \cdots P_2}^{x_2} \cdots \overbrace{P_j \cdots P_j}^{x_j}$$

和

$$\overbrace{P_{j+1} \cdots P_{j+1}}^{x_{j+1}} \cdots \overbrace{P_i \cdots P_i}^{x_i}$$

的周期分别为

$$x_1 m_1 + \cdots + x_j m_j$$

和

$$x_{j+1} m_{j+1} + \cdots + x_i m_i,$$

因此互素. 易见, 由这两个闭路决定的 σ_A 的两个周期点的周期分别是这两个闭路的周期的因子, 因而也互素. □

引理 3.2.63　设 σ_A 拓扑传递, 且有周期 m, n, 使得 $d(m,n)=1$, 则存在 $N>0$, 使对任意 $n \geqslant N$ 和任意 $i_0 \in S$, 存在可允许循环节 $(i_0 i_1 \cdots i_{n-1})$.

证明　据推论 3.2.61, 可设

$$P_1 = (i_0 \cdots i_{s-1}), \quad P_2 = (i_0 i_1' \cdots i_{t-1}')$$

是两个可允许循环节, 其中 $s>0, t>0$, 且 $d(s,t)=1$. 设 x, y 是正整数, 使得 $xs = 1 + yt$. 下面证明, 取 $N = sty$ 即可.

设 $n \geqslant N$. 记 $n = (M+1)N + ls + r$, 其中 $M \geqslant 0, 0 \leqslant l < ty, 0 \leqslant r < s$. 令

$$P_{1x} = \overbrace{P_1 \cdots P_1}^{x}, \quad P_{2y} = \overbrace{P_2 \cdots P_2}^{y}.$$

它们是可允许循环节, 长度分别为 sx, yt. 易见, 可允许循环节

$$\overbrace{P_1 \cdots P_1}^{M+y+l}\overbrace{P_{1x} \cdots P_{1x}}^{r}\overbrace{P_{2y} \cdots P_{2y}}^{s-r}$$

的长度为

$$(Mty + l)s + rxs + (s-r)yt = (M+1)N + ls + r = n. \qquad \square$$

定义 3.2.64　正整数集合

$$\{n > 0 | a_{ii}^{(n)} > 1, \forall 0 \leqslant i < k\}$$

的最大公因子叫做 $A = (a_{ij})$ 的周期, 也叫做 σ_A 的周期.

下面是本节的主要结果.

定理 3.2.65　下述条件等价:

(1) σ_A 拓扑强混合;

(2) σ_A 拓扑弱混合;

(3) σ_A 拓扑传递, 且 $d(c_1, \cdots, c_i) = 1$, 其中 $c_1, \cdots, c_i, i \geqslant 2$ 是 σ_A 的全部不同不可约周期;

(4) σ_A 拓扑传递, 且有周期 m 和 n, 使 $d(m,n)=1$;

(5) A 不可约, 且存在 $0 \leqslant i, j < k$ 和 n, 使得 $a_{ij}^{(n)} > 0, a_{ij}^{(n+1)} > 0$;

(6) A 不可约, 且有周期 1;

(7) A 是非周期的;

(8) $G(A)$ 有一条闭路过所有顶点, 且有两个周期互素的闭路.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2) 已知.

(2) $\Rightarrow$ (3) 拓扑传递是明显的.

下面用反证法证明. 设 $d(c_1,\cdots,c_i)=d>1$. 记 $P_1=(i_0i_1\cdots i_{c_1-1})$ 是一个可允许不可约周期节. 显然, $P_2=(i_{c_1-1}i_0\cdots i_{c_1-2})$ 也是一个可允许不可约周期节. 令

$$V_1=V_2=U_1={}_0[i_0\cdots i_{c_1-1}]_A,\quad U_2={}_0[i_{c_1-1}i_0\cdots i_{c_1-2}]_A.$$

下面证明, 不存在 $n>0$, 使得

$$(\sigma_A\times\sigma_A)^n(V_1\times V_2)\cap(U_1\times U_2)=(\sigma_A^n(V_2)\cap U_1)\times(\sigma_A^n(V_2)\cap U_2)\neq\varnothing.$$

设存在 $n>0$, 使上式成立, 即

$$\sigma_A^n(V_1)\cap U_1\neq\varnothing,\quad \sigma_A^n(V_2)\cap U_2\neq\varnothing.$$

据引理 3.2.58, 由上面第一式, 得

$$d|n.$$

设 $x\in\sigma_A^n(V_2)\cap U_2$, 即 $x\in U_2$ 且存在 $y\in V_2$, 使 $\sigma_A^n(y)=x$. 由此即得

$$y_0=i_0,\quad y_n=x_0=i_{c_1-1},\quad y_{n+1}=i_0,$$

因此 $(y_0y_1\cdots y_n)$ 是可允许循环节, 其长度为 $n+1$. 据引理 3.2.57, 又有

$$d|n+1.$$

综上, 有

$$d|n,d|n+1,$$

但当 $d>1$ 时, 这是不可能的. 这就证明了 $d(c_1,\cdots,c_i)=1$.

(3) ⇒ (4) 由引理 3.2.62 给出.

(4) ⇒ (5) 据推论 3.2.61, 可设

$$P_1=(i_0i_1\cdots i_{s-1}),\quad P_2=(i_0i_1'\cdots i_{t-1}')$$

是两个至少有一个公共符号的可允许循环节, 长度分别为 s,t 且 $d(s,t)=1,\forall s>0,t>0$. 存在正整数 x 和 y, 使得

$$xs=1+yt.$$

因为 $\overbrace{P_1\cdots P_1}^{x}$ 是长度为 xs 的可允许循环节, 据命题 3.2.28,

$$a_{i_0i_0}^{(xs)}>0.$$

同样, $\overbrace{P_2 \cdots P_2}^{y}$ 是长度为 yt 的可允许循环节, 又有

$$a_{i_0 i_0}^{(yt)} > 0.$$

令 $xs = n$, 即得

$$a_{i_0 i_0}^{(n)} > 0, \quad a_{i_0 i_0}^{(n+1)} > 0.$$

(5) $\Rightarrow$ (6) 设 $0 \leqslant i, j < k, n > 0$, 使得

$$a_{ij}^{(n)} > 0, \quad a_{ij}^{(n+1)} > 0.$$

据命题 3.2.28, 存在从 i 到 j 的可允许序列

$$P_1 = (ii_1 \cdots i_{n-1} j), \quad P_2 = (ii'_1 \cdots i'_n j),$$

长度分别为 $n+1, n+2$. 又据推论 3.2.35, 存在包含全部 k 个符号的可允许循环节 $P = (i \cdots j \cdots)$, 并设其长度为 $l \geqslant k$. P 中显然包含从 i 到 j 的一个可允许序列, 设其长度为 $m > 0$. 用 P_1, P_2 分别代替 P 中从 i 到 j 的这个可允许序列, 得到两个可允许循环节, 它们的长度分别为

$$l - m + n + 1, \quad l - m + n + 2,$$

而且, 进而可以假设这两个可允许循环节每一个都仍然包含全部符号, 据命题 3.2.28, 有

$$a_{ii}^{(l-m+n+1)} > 0, \quad a_{ii}^{(l-m+n+2)} > 0.$$

不难看出, 这两个式子对所有 $0 \leqslant i < k$ 均成立. 因此, 集合

$$\{n > 0 | a_{ii}^{(n)} > 0, \forall 0 \leqslant i < k\}$$

中有相邻的整数. 这就证明了 $A = (a_{ij})$ 的周期为 1, 其不可约性是明显的.

(6) $\Rightarrow$ (7) 因为 $A = (a_{ij})$ 不可约, 据命题 3.2.34 和推论 3.2.35, 存在包含全部符号的可允许循环节, 并设其长度为 $n > 0$. 因为可允许循环节由可允许不可约周期节生成, 故

$$d(c_1, c_2, \cdots, c_i) | n,$$

其中 $c_1, \cdots, c_i$ 为 σ_A 的全部不同的不可约周期. 显然, σ_A 的任意周期可为 $d(c_1, c_2, \cdots, c_i)$ 整除. 据假设, 有 $d(c_1, c_2, \cdots, c_i) = 1$, 即 (3) 成立. 据 (4), 存在 σ_A 的两个周期 m, n, 使得

$$d(m, n) = 1.$$

设 P, Q 是 $G(A)$ 的两个闭路, 周期分别为 m, n. 令 T 是 $G(A)$ 的过所有顶点的一个闭路, 周期为 $i > 0$. 据引理 3.2.55, 存在正整数 λ, μ, 使得

$$d(m + \lambda t, n + \mu t) = 1.$$

P, T 含有公共顶点. 重复 $T\lambda$ 次再与 P 在它们一个公共顶点处合成一个新的闭路, 其周期为 $m + \lambda t$. 同样, 重复 $T\mu$ 次再与 Q 在它们的任意公共顶点处合成一个新的闭路, 其周期为 $n + \mu t$. 这两个新闭路决定了两个包含全部符号的可允许循环节, 其长度分别为 $m + \lambda t, n + \mu t$. 据互素数的性质, 存在正整数 r, s, 使得

$$s(m + \lambda t) = r(n + \mu t) + 1.$$

由 $A = (a_{ij})$ 的不可约性, 存在 $h > 0$, 使得

$$A + A^2 + \cdots + A^h \gg \mathbf{0}.$$

下面证明 $A^{hs(m+\lambda t)} \gg \mathbf{0}$.

设 g_1, g_2 是任意两个正整数. 显然, 存在包含全部符号的可允许循环节, 其长度为

$$g_1 s(m + \lambda t),$$

即对每一个 $i \in S$, 存在长度为 $g_1 s(m + \lambda t)$ 的可允许循环节. 据命题 3.2.28, 有

$$a_{ii}^{(g_1 s(m+\lambda t))} > 0, \quad \forall 0 \leqslant i < k,$$

即方阵 $A^{g_1 s(m+\lambda t)}$ 的主对角线上元素均不为零. 对

$$A^{g_1 r(m+\lambda t)}, \quad A^{g_2 s(m+\lambda t)}, \quad A^{g_2 r(n+\mu t)}$$

有相同的结论. 于是根据矩阵乘法的基本性质, 有

$$A^{hs(m+\lambda t)} = A^{(h-1)s(m+\lambda t)} \cdot A^{r(n+\mu t)} \cdot A \geqslant A,$$

$$A^{hs(m+\lambda t)} = A^{(h-2)s(m+\lambda t)} \cdot A^{2r(n+\mu t)} \cdot A^2 \geqslant A^2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$A^{hs(m+\lambda t)} = A^{hr(n+\mu t)} \cdot A^h \geqslant A^h.$$

两端相加, 得

$$h \cdot A^{hs(m+\lambda t)} \geqslant A + A^2 + \cdots + A^h \gg \mathbf{0},$$

即 $A = (a_{ij})$ 是非周期的.

(7) $\Rightarrow$ (8) 设 $n>0$, 使 $A^n \gg \mathbf{0}$. 当然亦有 $A^{n+1} \gg \mathbf{0}$. 因此

$$a_{ii}^{(n)}>0, \quad a_{ii}^{(n+1)}>0, \quad \forall 0 \leqslant i<k.$$

据命题 3.2.28, 存在两个可允许循环节, 它们的长度分别为 $n, n+1$, 它们决定了 $G(A)$ 的两个闭路, 周期分别为 $n, n+1$. 因此, 它们的周期互素.

$G(A)$ 有一条闭路过所有顶点是明显的, 因为 $A=(a_{ij})$ 非周期, 故不可约.

(8) $\Rightarrow$ (1) 设

$$V(B, j)={ }_0\left[b_0 b_1 \cdots b_{j-1}\right]_A, \quad V(E, l)={ }_0\left[e_0 e_1 \cdots e_{l-1}\right]_A$$

是任意两个相对柱形. $G(A)$ 有一条闭路过所有顶点, 据命题 3.2.34, σ_A 是拓扑传递的. 又据推论 3.2.35, 存在包含全部符号的可允许循环节. 因此, 存在可允许序列

$$\left(b_0 b_1 \cdots b_{j-1} x_j \cdots x_{r-1} e_0\right), \quad r \geqslant j+1.$$

据引理 3.2.63, 存在 $N>0$, 使得对任意的 $m \geqslant N$, 存在可允许循环节 $\left(e_0 e_1^{\prime} \cdots e_{m-1}^{\prime}\right)$, 因此

$$\left(b_0 b_1 \cdots b_{j-1} x_j \cdots x_{r-1} e_0 e_1^{\prime} \cdots e_{m-1}^{\prime} e_0\right), \quad r \geqslant j$$

是可允许序列, 长度为 $m+r+1$. 因为

$$V(B, j)={ }_0\left[b_0 b_1 \cdots b_{j-1}\right]_A \supset_0\left[b_0 \cdots b_{j-1} x_j \cdots x_{r-1} e_0 e_1^{\prime} \cdots e_{m-1}^{\prime} e_0 \cdots e_{l-1}\right]_A,$$

故

$$\begin{aligned}
\sigma_A^{r+m}(V(B, j)) & \supset \sigma_A^{r+m}\left({ }_0\left[b_0 \cdots b_{j-1} x_j \cdots x_{r-1} e_0 e_1^{\prime} \cdots e_{m-1}^{\prime} e_0 \cdots e_{l-1}\right]_A\right) \\
& ={ }_0\left[e_0 \cdots e_{l-1}\right]_A=(E, l), \quad \forall m \geqslant N .
\end{aligned}$$

令 $M=r+N$. 有

$$\sigma_A^n(V(B, j)) \cap V(E, l) \neq \varnothing, \quad \forall n \geqslant M.$$ □

推论 3.2.66　σ_A 拓扑混合蕴涵 $\operatorname{ent}(\sigma_A)>0$ 和 σ_A 混沌.

证明　设 σ_A 拓扑混合. 据定理 3.2.65 (8), 易证 $G(A)$ 有两条周期互素的闭路过同一个顶点, 据定理 3.2.54, $\operatorname{ent}(\sigma_A)>0$ 和 σ_A 混沌. □

容易举例说明, 上述推论的逆不真[57].

推论 3.2.67　若 $A=(a_{ij})$ 不可约, 且主对角线上有非零元素, 则 A 是非周期的.

证明　据命题 3.2.34, $G(A)$ 有一条闭路过所有顶点. 这明显地蕴涵 σ_A 有不小于 $k(k \geqslant 2)$ 的周期. 另外, $A=(a_{ij})$ 主对角线上有非零元素, 蕴涵 σ_A 有不动点, 即有 1 周期. 因此, σ_A 有互素的周期. 据定理 3.1.65, $A=(a_{ij})$ 是非周期的. □

推论 3.2.68 若 $A=(a_{ij})$ 不可约, 则把 A 的主对角线上的元素都变成零 (如果有非零元素的话), 其余的元素不变, 则所得方阵仍然是不可约的.

证明 设 $a_{ii}=1(0\leqslant i\leqslant k)$. 据命题 3.1.46, $G(A)$ 有一条闭路过所有顶点, 记为

$$P=\cdots\to a_{ji}\to a_{ii}\to a_{il}\to\cdots.$$

易见, 在 P 中去掉所有顶点 a_{ii}(a_{ii} 可能出现不止一次), 仍然是一条闭路, 且除了 a_{ii} 外过所有其余的顶点. 这证明在 $A=(a_{ij})$ 中把主对角线上的元素 a_{ii} 换成零而其他元素不变, 所得方阵仍然是不可约的. 这个过程至多重复 k 次, 即可得所要结论. □

命题 3.2.69 若 $2\leqslant k\leqslant 3$, 则 σ_A 拓扑混合当且仅当 σ_A 拓扑传递, 且 $\mathrm{ent}(\sigma_A)>0$.

证明 据定理只需证明充分性.

设 $k=2$. $A=(a_{ij})$ 不可约情形只有下述四种:

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

其中前三种情形 σ_A 均有互素周期, 因而 $\mathrm{ent}(\sigma_A)>0$, 且据定理 3.2.65, σ_A 也是拓扑混合的. 第四种情形 σ_A 只有 2 周期, 因而不是拓扑混合的. 同时 $\mathrm{ent}(\sigma_A)=0$, 这证明 $k=2$ 结论成立.

设 $k=3$. 据推论 3.2.68, 可以只考虑 $A=(a_{ij})$ 的主对角线元素全为零的情形. 又据命题 3.2.36 及推论 3.2.37, 如果 $A=(a_{ij})$ 的每一行和每一列都只有一个元素不为零, 则 $\mathrm{ent}(\sigma_A)=0$ 且 σ_A 不是拓扑混合的. 余下的情况是, $A=(a_{ij})$ 至少有一行或一列其上有两个元素不为零. 先考虑只有一行或一列, 其上有两个元素不为零的情况. 除掉转置不计外, 只有下述两种情形:

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

易于看出, 每一种情形的 σ_A 都有 2 和 3 两个周期, 它们互素, 因而 $\mathrm{ent}(\sigma_A)>0$ 和 σ_A 是拓扑混合的.

当 $A=(a_{ij})$ 有多于一行或一列, 其上有两个元素不为零时, 它显然可由上述两种情形再加一个 0,1 方阵而得到. 据命题 3.2.6, $A=(a_{ij})$ 是非周期的, 因而 $\mathrm{ent}(\sigma_A)>0$ 和 σ_A 是拓扑混合的. □

3.3 转移不变集

到目前为止, 转移自映射的动力性状大体上已经清楚了. 它们是很典型和很基本的. 判断一个一般系统是否具有符号动力系统的这些动力性状和在什么条件下具有这些动力性状, 例如拓扑熵在什么条件下大于零和在什么条件下是混沌的, 等等, 是拓扑动力系统研究的一个重要内容. 通过拓扑共轭或半共轭把一个紧致系统与转移自映射相比较, 是拓扑动力系统研究中的一个重要和普遍使用的方法, 具有广泛而重要的应用. 下面我们给出紧致系统与转移自映射拓扑共轭和半共轭的充要条件.

设 (X,f) 为紧致系统.

定义 3.3.1　对于闭子集 $\Lambda\subset X$, 如果 Λ 对 f 不变且子系统

$$f|_\Lambda:\Lambda\to\Lambda$$

与 k 阶转移自映射拓扑共轭, 即存在在上同胚映射

$$h:\Lambda\to S^{\mathbb{Z}_+}$$

使得下述图表可交换

$$\begin{array}{ccc}\Lambda & \xrightarrow{f|_\Lambda} & \Lambda\\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h}\\ S^{\mathbb{Z}_+} & \xrightarrow{\sigma} & S^{\mathbb{Z}_+}\end{array}$$

即 $hf|_\Lambda=\sigma h$, 则 Λ 叫做 f 的 k 阶转移不变集.

如果上面的 h 仅仅是在上连续的, 则称 Λ 是 f 的一个 k 阶伪转移不变集.

以下引进一个重要引理, 其证明从略.

引理 3.3.2　设 A 和 B 是 X 的子集合, 则

$$f(A\cap f^{-1}B)=f(A)\cap B.$$

下面给出 f 有 k 阶转移不变集的充要条件.

命题 3.3.3　f 有 k 阶转移不变集的充要条件是存在两两不相交的紧致子集

$$A_0,A_1,\cdots,A_{k-1},$$

满足

(1) $f(A_i)\supset\bigcup\limits_{s=0}^{k-1}A_s,\ i=0,1,\cdots,k-1;$

(2) $\sharp\left(\bigcap\limits_{s=0}^{\infty}f^{-s}(A_{i_s})\right)\leqslant 1,\ \forall(i_0,i_1,\cdots)\in S^{\mathbb{Z}_+}.$

证明 先证明必要性. 设 $\Lambda \subset X$ 是 f 的一个 k 阶转移不变集, 即存在在上的同胚映射

$$h : \Lambda \to S^{\mathbb{Z}_+},$$

使得 $hf|_\Lambda = \sigma h$.

记

$$B_i = \{x = (x_0 x_1 \cdots) \in S^{\mathbb{Z}_+} | x_0 = i\},$$

$$A_i = h^{-1}(B_i), \quad i = 0, \cdots, k-1.$$

显然, $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ 是 Λ 的两两不相交的闭子集, 且

(1) $f(A_i) = fh^{-1}(B_i) = h^{-1}\sigma(B_i) = h^{-1}(S^{\mathbb{Z}_+}) = \Lambda \supset \bigcup\limits_{s=0}^{k-1} A_s, \quad i = 0, \cdots, k-1.$

(2)

$$\begin{aligned}\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s}) &= \bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}h^{-1}(B_{i_s}) = \bigcap_{s=0}^{\infty} h^{-1}\sigma^{-s}(B_{i_s}) \\ &= h^{-1}\left(\bigcap_{s=0}^{\infty} \sigma^{-s}(B_{i_s})\right) = h^{-1}((i_0 i_1 \cdots))\right).\end{aligned}$$

最后一个式子由于 h 是同胚映射因而是单点集, 即有

$$\sharp\left(\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s})\right) \leqslant 1, \quad \forall (i_0, i_1, \cdots) \in S^{\mathbb{Z}_+}.$$

下面证明充分性. 先证明对任意 $l > 0$ 和 $S = \{0, 1, \cdots, k-1\}$ 上任意序列 $(i_0 \cdots i_l)$, 有

$$f^l\left(\bigcap_{s=0}^{l} f^{-s}(A_{i_s})\right) = A_{i_l}. \tag{3.3.1}$$

当 $l = 1$ 时, 显然成立. 设上式对 l 已成立. 利用引理 3.3.2, 有

$$\begin{aligned}f^{l+1}\left(\bigcap_{s=0}^{l} f^{-s}(A_{i_s})\right) &= f \cdot f^l\left(\bigcap_{s=0}^{l} f^{-s}(A_{i_s}) \cap f^{-l} \cdot f^{-1}(A_{i_s})\right) \\ &= f\left(f^l \bigcap_{s=0}^{l} f^{-s}(A_{i_s}) \cap f^{-1}(A_{i_{l+1}})\right) \\ &= f\left(A_{i_l} \cap f^{-1}A_{i_{l+1}}\right) \\ &= f(A_{i_l}) \cap A_{i_{l+1}} = A_{i_{l+1}}.\end{aligned}$$

据归纳法, (3.3.1) 式对所有 $l > 0$ 已成立. 据 Cantor 交的性质, 有

$$\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s}) \neq \varnothing.$$

据假设, $\forall(i_0 i_1 \cdots) \in S^{\mathbb{Z}_+}$,

$$\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s})$$

是单点集. 下面把这个单点集与它所含的点等同起来. 记

$$C = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1},$$

且

$$\Lambda = \bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(C) = \bigcup_{(i_0 i_1 \cdots) \in S^{\mathbb{Z}_+}} \bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s(A_{i_s})}.$$

因为 C 是紧致的, 每一个 $f^{-s}(C)$ 也是紧致的, 据吉洪诺夫定理, Λ 也是紧致的. 显然 $f(\Lambda) \subset \Lambda$. 定义映射

$$\begin{cases} h : \Lambda \to S^{\mathbb{Z}_+}, \\ \displaystyle\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s}) \mapsto (i_0 i_1 \cdots). \end{cases}$$

因为 $A_0, \cdots, A_{k-1}$ 两两不相交, 易于验证 h 是一一的. 下面证明 h 是连续的. 任取 $x \in \Lambda$. 设

$$h(x) = (i_0 i_1 \cdots).$$

对任意 $n > 0$, 考虑柱形 $_0[i_0 i_1 \cdots i_n]$. 取 $y \in \Lambda$ 与 x 充分接近, 并设

$$y = \bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{j_s}),$$

因而

$$h(y) = (j_0 j_1 \cdots).$$

因为 $f^s(x) \in A_{i_s}, s = 0, 1, \cdots, n-1$. 据 f 的连续性且考虑到 $A_0, \cdots, A_{k-1}$ 两两不相交, 可设 $f^s(y) \in A_{i_s}, s = 0, 1, \cdots, n-1$, 即

$$y = (A_{i_0} \cap \cdots \cap A_{i_{n-1}}) \cap \left(\bigcap_{s=n}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s}) \right).$$

据 h 的定义, 显然有

$$h(y) \in_0 [i_0 i_1 \cdots i_{n-1}].$$

这证明 h 在 x 处连续. $x \in \Lambda$ 是任意的, 故 h 在 Λ 上连续. 因 Λ 和 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 均是紧致 Hausdorff 的, 故 h^{-1} 也连续, 因而 h 是同胚映射.

还需证明

$$hf|_\Lambda = \sigma h.$$

设

$$\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s}) = \{x\}, \quad (i_0 i_1 \cdots) \in S^{\mathbb{Z}_+},$$

即有 $f^s(x) \in A_{i_s}, s = 0, 1, \cdots$. 显然

$$\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_{s+1}}) = \{f(x)\},$$

因此

$$\begin{aligned} hf(x) &= (i_0 i_1 \cdots) = \sigma((i_0 i_1 \cdots)) \\ &= \sigma h \left(\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s}) \right) = \sigma h(x). \end{aligned}$$

□

显然, 命题 3.3.3 中的条件 (1) 是 f 有 k 阶伪转移不变集的充要条件.

第 4 章 一般系统——遍历理论方法

设 (X, f) 是一个紧致系统. 我们在第 1 章曾经说过, 紧致系统的核心问题是点的轨道的渐近性质或拓扑结构. 那么, 这里提出一个基本问题, 即是否每一个点的轨道都是重要的? 也就是是否每一点的轨道都必须考虑? 寻求 “最小” 的子集, 使得只要研究其上的点的轨道就够了, 是我们研究一般拓扑动力系统的基本思想和观点, 这将是贯穿本书下面讨论始终的主要思想, 并由此引进一系列新的概念. 从纯拓扑观点, 我们已经知道, 只有那些具有某种回复性的点才是重要的, 而正如我们前面提到的, 非游荡点具有最弱的回复性, 是否只讨论非游荡点的轨道的渐近性质就够了? 如果是这样, 那么游荡集就可以视为 “干扰”, 可以忽略不计. 但跟着的问题是, 非游荡集上是否还有 “干扰”? 我们当然希望把所有 “干扰” 全部清除, 只研究那些最必须的点的轨道结构. 还有一些其他类似的问题, 我们将陆续展开讨论. 上面这些问题的解决, 单单依赖拓扑方法就显得不够了, 必须引进遍历理论方法. 遍历理论方法可以使人们排除干扰而看清问题的本质, 这正合于我们上述目的. 遍历理论思想方法大约于 19 世纪末和 20 世纪初由 Birkhoff[3] 和 Poincaré[45] 引进, 他们证明了一些基本结果, 给这个理论打下了思想基础. 在此基础上, 1937 年, Kryloff-Bogoliuboff[33] 首先在常微分方程 (流) 中建立不变测度理论, 证明紧致 (流) 系统存在不变测度, 奠定了现代微分动力系统和拓扑动力系统研究中的遍历 (不变测度) 理论基础. 有关离散紧致系统的遍历理论的一个极好参考文献是 [50]. 经众多数学家的不懈努力, 目前遍历理论已成为动力系统研究中非常重要的一个部分. 值得提出的是, 我国已故数学家廖山涛教授[35], [36] 最先把这一理论应用到现代微分动力系统研究中来, 在诸如周期轨道的存在性和结构稳定性的证明中得到重要结果, 对遍历理论的发展作出杰出贡献.

本章将引进遍历理论方法, 陆续开展这些问题的讨论. 本书的重点是离散紧致系统. 下面讨论的内容的一个极好参考文献是 [50].

4.1 紧致系统的不变测度

4.1.1 紧致系统的不变测度

下面假设 (X, f) 是紧致系统, 并记 $\mathscr{B}(X)$ 为它的 Borel σ 代数, 这样, $(X, \mathscr{B}(X))$ 也是一个可测空间 (可假设为概率空间), $(X, \mathscr{B}(X), f)$ 同时是一个概率系统. 下面

讨论, 请读者参阅附录 2 和文献 [50].

用 $M(X)$ 表示可测空间 $(X,\mathscr{B}(X))$ 上的全体概率测度的集合, 它是一个可度量紧致有仿射结构的凸空间, 其上拓扑称为 $\omega*$ 拓扑. 每一个点 $x\in X$ 决定 $M(X)$ 中一个成员 δ_x, 定义如下:

$$\delta_x(A)=\begin{cases}1, & \text{如果 } x\in A,\\ 0, & \text{如果 } x\notin A, \forall A\in\mathscr{B}(X).\end{cases}$$

所以映射 $x\mapsto\delta_x$ 把 X 嵌入 $M(X)$, 前者可以看作后者的子集. 此后称 $M(X)$ 中元素为 X 上的 Borel 概率测度, 并称 δ_x 为由点 x 决定的点测度或原子测度. 设 $m,\mu\in M(X)$, 定义凸组合

$$(pm+(1-p)\mu)(A)=pm(A)+(1-p)\mu(A),\quad \forall A\in\mathscr{B}(X), p\in[0,1].$$

一般地, 设 $m_i\in M(X), i=1,2,\cdots,m, m>1$,

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i m_i\in M(X),\quad \lambda_i\in[0,1],\quad i=1,\cdots,m,\quad \sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1.$$

特别地, 设 $x\in X$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)}\in M(X),\quad \forall n>1.$$

因此

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)}\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{4.1.1}$$

是 $M(X)$ 上的一个序列, 叫做沿 x 的轨道生成的概率测度序列. 据 $M(X)$ 的紧致性, 这个序列有极限点. 记 M_x 为序列 (4.1.1) 全体极限点的集合.

$m\in M(X)$ 叫做对 f 不变的, 或称作 f 的不变测度, 如果

$$m(f^{-1}(A))=m(A),\quad \forall A\in\mathscr{B}(X);$$

$m\in M(X,f)$ 叫做 f 的遍历 (不变) 测度, 如果

$$A\in\mathscr{B}(X),\quad f^{-1}(A)=A\Rightarrow m(A)=1 \text{ 或 } m(A)=0.$$

f 的全体不变测度的集合和全体遍历测度的集合分别记为 $M(X,f), E(X,f)$.

设 $x\in X$. 一般 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)}\notin M(X,f), n>0$. 但是, 有

定理 4.1.1 *如果 x 是 f 的一个 n 周期点, 则* $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)} \in E(X,f), n>0.$

也就是每一个周期点生成一个原子遍历测度. 从定义出发直接验证, 证明从略.

$M(X,f)$ 是 $M(X)$ 的紧凸子集, 而 $E(X,f)$ 则是 $M(X,f)$ 的尖点 (extreme point) 构成的子集[18], [50]. 所谓尖点即是一个凸集那样的点, 它们不能表示成其中其他点的凸组合. 例如, 一个凸集三角形的尖点就是三个顶点, 而一个凸集实心圆盘的尖点则是圆周上的点. 另外, 遍历测度的意义是非常明显的, 即就这个遍历测度而言, 系统不能分解成两个都有意义的子系统 (在概率意义下). 遍历测度在不变测度中可能占很小基数, 但其重要性由 Choquet 表示定理给出, 即每一个不变测度都可以表成遍历测度的广义凸组合, 例如在三角形凸集中, 三角形中每一点都可写成三个顶点的凸组合[50]. 在这个意义上, 可以说遍历测度是最基本的. 再者, 有

定理 4.1.2 $A \in \mathscr{B}(X), m(A)=1, \forall m \in M(X,f) \Leftrightarrow m(A)=1 \Leftrightarrow \forall m \in E(X,f)$.

这个结果在我们后面的讨论中有基本性的应用, 文献 [44] 对自同胚证明了这个结果, 但在证明中没有用到同胚性, 它对自映射也成立.

定理 4.1.3 $M(X) \supset M(X,f) \supset E(X,f) \neq \varnothing$.

这就是 Krylov-Bogolioubov 理论基础, 即紧致系统 (包括连续型动力系统, 即流) 总是存在不变测度. 其详细讨论见附录 2.

符号同前, 关于不变测度的存在性, 还有

定理 4.1.4 $M_x \subset M(X,f), \forall x \in X$, *即序列 (4.1.1) 的每一个极限点都是 f 的不变测度.*

M_x 中的元素称为沿点 x 的轨道生成的不变测度. 详细讨论见附录 2.

设 $X_0 \subset X$ 为非空集合. 记

$$M_{X_0} = \bigcup_{x\in X_0} M_x \subset M(X,f). \tag{4.1.2}$$

拓扑动力系统, 顾名思义拓扑方法是最基本的方法, 但随着讨论的深入, 单纯拓扑方法对某些问题的讨论往往显得无能为力, 而遍历方法的引入, 使人们对动力系统的理解将会随着加深. 随着本书逐渐展开, 读者将会逐渐有所体会. 下面举一个例子说明这个问题的一斑. 我们知道, 一个极小集 (系统), 是每一个点的轨道都在其中稠密的集合. 从纯拓扑角度, 这样的集合好像是铁板一块, 没有什么结构可言, 每个点的轨道似乎没有区别. 但遍历方法的引入人们却发现情况并非如此. 为了作出解释, 先引进几个名词.

一个紧致系统 (X,f), 如果它的遍历测度集合是单点集, 即 $E(X,f)$ 只含一个点, 就称为系统是唯一遍历的, 进而, 如果这个唯一遍历测度的支撑是全空间, 则称

为严格遍历的. 唯一遍历与严格遍历无本质区别.

定理 4.1.5 *严格遍历系统是极小系统.*

证明 设紧致系统 (X,f) 是严格遍历的, 即 $E(X,f)=\{m\}, S_m=X$. 从定理 4.1.2, 据定义容易看出对任意 $x\in X$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)}\to m,\quad S_m=X.$$

如果 (X,f) 不是极小的, 则存在 $x\in X,\omega(x,f)\subsetneqq X$. 显然, 这样的点 x 生成的任意不变测度 μ, 都有 $S_\mu\subset\omega(x,f)\subsetneqq X$. 显然这样的不变测度与 m 不同, 矛盾. □

问题是上述定理的逆定理成立吗? 即极小系统一定是严格遍历的吗? 答案是否定的. 下面我们援引 Oxtoby 构造的例子说明这个问题.

例 4.1.1[44] 极小但非严格遍历的系统的例子.

设 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 或 Σ_2 为由两个符号 $\{0,1\}$ 生成的单边符号动力系统. 设 $\{k_i,i\geqslant 0\}$ 为正整数序列, 满足

$$k_i \text{ 整除 } k_{i+1},\quad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{k_{i-1}}{k_i}\leqslant\frac{1}{12},\text{ 例如, } k_i=2^{i(i+9)/2},\forall i\geqslant 0.$$

又设 n,m 是两个整数. 定义

$$E_i=\bigcup_{-\infty<m<\infty}\{n:|n-mk_i|\leqslant k_{i-1}\},\quad \forall i>0.$$

因为 $n\in E_i$, 如果 $|n|\leqslant k_{i-1}$, 且 $k_i\to\infty$, 显然, 对任意的 n, 存在最小的正整数 $p(n)$, 使得 $n\in E_p$. 定义

$$x_n=\begin{cases}0, & \text{如果 } p(n) \text{ 是偶数},\\ 1, & \text{如果 } p(n) \text{ 是奇数},\forall n\geqslant 0.\end{cases}$$

我们将证明, 限制在 $x=(x_0x_1\cdots)\in S^{\mathbb{Z}_+}$ 生成的极限集 $\omega(x,\sigma)$ 上的子系统是极小的但非严格遍历的.

首先, 易于验证 $\{E_1,E_2,\cdots,E_p\}$ 是平移 k_p 不变的, 因为

$$p(n)=p,m\equiv n(\text{mod } k_i),|n|\leqslant k_{i-1}\Rightarrow p(m)=p.$$

因此

$$m\equiv n(\text{mod } k_i),|n|\leqslant k_{i-1}\Rightarrow p=p(n)\leqslant i,k_p \text{ 整除 } k_i,m\equiv n(\text{mod } k_p),\ p(m)=p(n),$$

所以 $x(m)=x(n)$. 这证明 $\rho(x,\sigma^n(x))\leqslant\dfrac{1}{1+k_{i-1}},\forall n\equiv 0(\text{mod}k_i)$, 因此 $x\in A(\sigma)$, 即为几乎周期点.

其次, 如果 $1 \leqslant j \leqslant i$, E_j 在范围 $0 < n \leqslant k_i$ 内的基数恰好是 $\frac{k_i}{k_j}(2k_{k_{j-1}+1})$. 因此 $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_i$ 在范围 $0 < n \leqslant k_i$ 内的元素基数的一个上界是

$$\sum_{j=1}^{i} \frac{3k_i k_{j-1}}{k_j} \leqslant 3k_i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_{j-1}}{k_j} < \frac{1}{4}k_i.$$

这蕴涵, 在范围 $0 < n \leqslant k_i$ 内, 至少有 $\frac{3}{4}$ 的 n 使 $p(n) = i+1$, 因而

$$\left| \frac{1}{k_i} \sum_{n=1}^{k_i} x_n - \frac{1}{k_{i+1}} \sum_{n=1}^{k_{i+1}} x_n \right| \geqslant \frac{1}{2}, \quad \forall n > 0. \tag{4.1.3}$$

令 χ 为集合 $S_1^{\mathbb{Z}_+} = \{y \in S^{\mathbb{Z}_+} : y_0 = 1\}$ 上的特征函数, 即

$$\chi(y) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } y_0 = 1, \\ 0, & \text{如果 } y_0 = 0, \forall y \in S^{\mathbb{Z}_+}. \end{cases}$$

易见 $x_n = \chi(\sigma^n(x)), \forall n > 0$, 所以式 (4.1.3) 可写成

$$\left| \frac{1}{k_i} \sum_{n=1}^{k_i} \chi(\sigma^n(x)) - \frac{1}{k_{i+1}} \sum_{n=1}^{k_{i+1}} \chi(\sigma^n(x)) \right| \geqslant \frac{1}{2}, \quad \forall n > 0. \tag{4.1.4}$$

易见 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\sigma^i(x)}(S_1^{\mathbb{Z}_+}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \chi(\sigma^i(x))$. 从式 (4.1.4) 易见, 这个式子不收敛, 因此 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\sigma^i(x)}$ 也不收敛, 因而 M_x 不是单点集, $\sigma|_{\omega(x,\sigma)}$ 不是唯一遍历当然也不是严格遍历的.

纯拓扑方法不能区分极小系统中不同点的轨道结构, 极小系统似乎是铁板一块, 无结构之可言, 但遍历方法却使人们对紧致系统的认识加深一步, 发现极小系统可以有丰富的结构. 我们说过, 符号动力系统构造反例的作用几乎是不可代替的, 这个例子仅是一斑, 下面还会遇到大量这样的例子.

4.1.2　全概率集合, 测度中心, 极小吸引中心

设 (X, f) 是一个紧致系统. 先引进一个术语.

定义 4.1.6　设 $X_0 \subset X$ 非空. 称 X_0 是 f 的一个全概率可测集合, 如果 $X_0 \in \mathscr{B}(X), m(X_0) = 1, \forall m \in M(X, f)$. 称 X_0 是 f 的一个全概率集合, 如果 $\forall m \in M(X, f)$, 存在 $X_m \subset X_0, X_m \in \mathscr{B}(X), m(X_m) = 1$. 全概率可测集合亦称绝对测度 1 可测集合; 全概率集合亦称绝对测度 1 集合.

我们先讨论这样的问题, 即是否存在 (X, f) 的一个最小的子系统, 它包含整个系统的全部重要动力性状? 如果这样的子系统存在, 那么生成它的子集合必须是一个最小的全概率可测紧子集.

定理 4.1.7 设 (X, f) 为紧致系统. 则 $m(R(f)) = 1, \forall m \in M(X, f)$, 即回复点集是全概率 Borel 集合.

证明[50] 因为紧致可度量空间有可数基, 设 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的一组可数基. 有

$$X - R(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(U_n \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-k}(X - U_n)\right),$$

因此, 据 Poincaré 回复定理 (见附录 B), 对每一个 n 和每一个 $\mu \in M(X, f)$, 有

$$\mu\left(U_n \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-k}(X - U_n)\right) = 0.$$

因此 $\mu(X - R(f)) = 0, \forall \mu \in M(X, f)$, 因而 $\mu(R(f)) = 1, \forall \mu \in M(X, f)$. □

据定理 4.1.7, $\overline{R(f)} \subset \Omega(f)$ 都是全概率紧致集合, 因此限制在它们上的子系统包含全系统的全部重要动力性状. 但它们是最小的这样的子系统吗? 为了回答这个问题, 我们需要引进一些新概念.

4.1.3 测度中心, 极小吸引中心

设 $X_0 \subset X$ 为非空集合.

定义 4.1.8 集合 $E \subset X$ 叫做 f 相对 X_0 的测度中心, 如果下述条件得到满足:

(1) $\overline{E} = E$;

(2) $f(E) \subset E$;

(3) $m(E) = 1, \forall m \in M_{X_0}$;

(4) E 无真子集满足上述三个条件.

f 相对 X_0 的测度中心记作 $M(X_0)$. 当 $X_0 = X$ 时, 记 $M(f) = M(X)$, 称作 f 的测度中心.

定理 4.1.9 设 (X, f) 为紧致系统, $X_0 \subset X$ 非空. 则

$$M(X_0) = \overline{\bigcup_{m \in M_{X_0}} S_m}.$$

特别地,

$$M(f) = \overline{\bigcup_{m \in M(X, f)} S_m}.$$

证明 $M(X_0) \subset \overline{\bigcup_{m\in M_{X_0}} S_m}$ 是显然的, 因为 $\mu\left(\overline{\bigcup_{m\in M_{X_0}} S_m}\right) = 1, \forall \mu \in M_{X_0}$. 若存在 $x \in \overline{\bigcup_{m\in M_{X_0}} S_m} - M(X_0)$, 则存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $V(x,\varepsilon) \cap M(X_0) = \varnothing$. 易见存在某个 $m \in M_{X_0}$, 使得 $S_m \cap V(x,\varepsilon) \neq \varnothing$. 由支撑的性质, 有 $m(V(x,\varepsilon)) > 0$, 这与 $m(M(X_0)) = 1$ 矛盾. □

这个定理由支撑的语言给出测度中心的表达式, 但易见, 这个表达式不易操作. 以后我们将给出测度中心的另一种相对而言易于操作的表述.

下面给出测度中心的另一种描述, 即极小吸引中心, 它最初是对流, 即连续型动力系统引进的, 作者把它引进到连续自映射[97], 即离散型动力系统中来. 两者等价的证明亦很简单.

设 $E \subset X$ 非空, 其特征函数记为 χ_E. 设 $x \in X$. 若下述极限

$$P_x(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_E(f^i(x))$$

存在, 则称它是在 f 作用下 x 进入 E 的概率. 一般地, 记

$$\underline{P}_x(E) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_E(f^i(x));$$

$$\overline{P}_x(E) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_E(f^i(x)).$$

设 $X_0 \subset X$ 非空. 称子集合 $E \subset X$ 为 f 相对 X_0 的一个吸引中心, 如果

$$\overline{E} = E,\ f(E) \subset E,\ 且\ P_x(V(E,\varepsilon)) = 1, \forall \varepsilon > 0, \forall x \in X_0.$$

定义 4.1.10(极小吸引中心) X 的子集合叫做 f 相对 X_0 的极小吸引中心, 如果它是 f 相对 X_0 的吸引中心但无真子集亦如此, 即极小吸引中心是最小的吸引中心.

f 相对 X_0 的极小吸引中心记作 $C(X_0)$. 记 $C_x = C(\{x\}), x \in X, C(f) = C(X)$. C_x 叫做 f 在点 x 处的极小吸引中心, $C(f)$ 叫做 f 的极小吸引中心.

为了证明下述定理, 先证明几个辅助引理.

引理 4.1.11 设 $E \in \mathscr{B}(X)$, 则

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_E(f^i(x)) + \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{(X-E)}(f^i(x)) \leqslant 1$$

和

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\chi_E(f^i(x))+\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\chi_{(X-E)}(f^i(x))=1.$$

证明从略.

引理 4.1.12 设 $x\in X$, 则 $C_{f(x)}=C_x, C_x\subset\omega(x,f)$.

由定义直接证明, 从略.

引理 4.1.13 设 E,F 分别为 X 的开子集和闭子集. 又设

$$m_i, m\in M(X),\quad i=1,2,\cdots,\quad 且\ m_i\xrightarrow{\omega^*}m,$$

则

$$\liminf_{i\to\infty}m_i(E)\geqslant m(E),\quad \limsup_{i\to\infty}m_i(F)\leqslant m(F).$$

这是 $M(X)$ 上 $\omega*$ 拓扑的一个推论, 证明参见文献 [50].

定理 4.1.14 设 (X,f) 为紧致系统, $X_0\subset X$ 非空. 则 $M(X_0)=C(X_0)$. 特别地, $C(f)=M(f),\forall x\in X, C_x=\overline{\bigcup_{m\in M_x}S_m}$.

证明 由定理 4.1.9, 有 $M(X_0)=\overline{\bigcup_{m\in M_{X_0}}S_m}$. 先证明 $M(X_0)$ 是 f 相对 X_0 的一个吸引中心. 设不然, 即存在 $\varepsilon>0$, $x\in X_0$ 和正整数递增序列 $\{n_j\}$, 使得

$$P_x(V(M(X_0),\varepsilon))=\lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1}\chi_{V(M(X_0),\varepsilon)}(f^i(x))<1.$$

必要时取子序列, 可设

$$\frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1}\delta_{f^i(x)}\to m\in M_x\subset M_{X_0}.$$

据前述诸辅助引理, 有

$$\begin{aligned}m(X-V(M(X_0),\varepsilon))&\geqslant\limsup_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1}\delta_{f^i(x)}(X-V(M(X_0),\varepsilon))\\&=\limsup_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1}\chi_{(X-V(M(X_0),\varepsilon))}(f^i(x))\\&=1-\liminf_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1}\chi_{V(M(X_0),\varepsilon)}(f^i(x)).\end{aligned}$$

这与 $m(M(X_0))=1$ 矛盾. 这证明 $C(X_0)\subset M(X_0)$.

下面证明 $C(X_0) = M(X_0)$. 设不然, 则 $M(X_0) - C(X_0)$ 是 $M(X_0)$ 的非空真子集. 取 $y \in M(X_0) - C(X_0)$, 存在 $\varepsilon > 0, \delta > 0$, 使 $V(y,\delta) \cap V(C(X_0),\varepsilon) = \varnothing$. 显然存在某个 $m \in M_{X_0}$, 使 $S_m \cap V(y,\delta) \neq \varnothing$, 因而 $m(V(y,\delta)) > 0$. 设存在正整数递增序列 $\{n_j\}$, 使 $\dfrac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1}\delta_{f^i(x)} \to m, x \in X_0$. 据前述辅助引理, 有

$$
\begin{aligned}
\underline{P}_x(V(C(X_0),\varepsilon)) &\leqslant \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1} \chi_{V(C(X_0),\varepsilon)}(f^i(x)) \\
&\leqslant 1 - \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1} \chi_{X-V(C(X_0),\varepsilon)}(f^i(x)) \\
&\leqslant 1 - \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1} \chi_{V(y,\delta)}(f^i(x)) \\
&\leqslant 1 - \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1} \delta_{f^i(x)}(V(y,\delta)) \\
&\leqslant 1 - m(V(y,\delta)) < 1.
\end{aligned}
$$

这与 $C(X_0)$ 的定义矛盾. 故 $C(X_0) = M(X_0)$. □

因此, $f|_{M(f)} : M(f) \to M(f)$ 是包含全系统的全部重要动力性状的最小的子系统. 显然 $M(f) \subset \overline{R(f)} \subset \Omega(f)$. 以后我们将证明, 上面的包含都可以是真包含.

第 5 章　回复性的层次, 测度中心的构造

设 (X, f) 为紧致系统. 我们知道, 回复性是动力系统最重要的性质. 下面是经典的五个回复性层次:

$$F(f) \subset P(f) \subset A(f) \subset R(f) \subset \Omega(f).$$

我们已经知道 $m(R(f)) = 1, \forall m \in M(X, f)$, 即回复点集是一个全概率可测集合. 因此, 为得到一个最 "小" 的全概率集合, 可在回复点集的子集合中寻找. 一个自然的问题是几乎周期点集是全概率集合吗? 我们将证明, 答案是否定的.

5.1　回复性的新层次

上面提到的回复性的五个层次是从拓扑角度考虑得到的. 为了回答我们上面提出的问题, 必须从遍历理论角度引进新的回复性层次. 下面依次引进两个新的层次.

5.1.1　弱几乎周期点

据前面所讨论, 一个最小的全概率集合, 可在 $A(f)$ 和 $R(f)$ 中间寻求. 先来回忆一下几乎周期点的定义. 下面总是假设 (X, f) 为紧致系统.

$x \in X$ 叫做 f 的几乎周期点, 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_\varepsilon > 0$, 使得对任意 $q > 0$, 存在 $q \leqslant n < q + N_\varepsilon$, 使得 $f^n(x) \in V(x, \varepsilon)$. 直观上, 也就是在任意连续 N_ε 个正整数之间, 至少存在一个整数 n, 使得 $f^n(x)$ 回到 x 的 ε 邻域内. 这样的 n 的集合或整数的子序列叫做相对稠密的. 形象地, 我们可以说, 每一段连续 N_ε 个整数至少存在一个这样的整数 n, 使得 $f^n(x) \in V(x, \varepsilon)$, 或简单地 "一段一个". 现在把这个条件放宽, 引进下述定义.

定义 5.1.1　点 $x \in X$ 叫做 f 的弱几乎周期点, 如果任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $N_\varepsilon > 0$, 使得基数

$$\sharp(\{r | f^r(x) \in V(x, \varepsilon), 0 < r < nN_\varepsilon\}) \geqslant n, \quad \forall n > 0. \tag{5.1.1}$$

这样的 r 亦构成整数序列的一个子序列, 其性质可以简单地称作 "n 段 n 个". 至少从表面上看, 这是 "一段一个" 的推广. 也就是弱几乎周期点是几乎周期点的推广. 我们用 $W(f)$ 表示 f 的全体弱几乎周期点的集合, 容易直接证明弱几乎周期

点集对 f 不变, 即 $f(W(f)) \subset W(f)$. 弱几乎周期点显然是回复点, 即 $W(f) \subset R(f)$. 当然, 几乎周期点是弱几乎周期点. 如果弱几乎周期点是一个新概念, 还必须证明, 弱几乎周期点既不同于几乎周期点也不同于回复点. 我们将通过举例说明回复点可以不是弱几乎周期点和弱几乎周期点可以不是几乎周期点.

下面引进两个术语. 设 $U, V \subset X$ 是两个非空开集, $x \in X$. 记

$$N(U,V) = \{n \in \mathbb{N} | U \cap f^{-n}(V) \neq \varnothing\}$$

和

$$N(x,U) = \{n \in \mathbb{N} | f^n(x) \in U\}.$$

一个整数集合 $S \subset \mathbb{N}$, 其正下密度定义为

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sharp\{S \cap (1,2,\cdots,n)\}}{n};$$

其正上密度定义为

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sharp\{S \cap (1,2,\cdots,n)\}}{n}.$$

当

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sharp\{S \cap (1,2,\cdots,n)\}}{n} > 0, \quad \forall n > 0$$

时, 就说 S 有正下密度 (PLD), 而当

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sharp\{S \cap (1,2,\cdots,n)\}}{n} > 0$$

时, 则说 S 有正上密度 (PUD).

容易证明

$$x \in W(f) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, N(x, V(x,\varepsilon)) \text{ 有正下密度}.$$

两者可以看作弱几乎周期点的等价定义, 前者几何意义更清楚, 而后者更形式一些, 不同场合运用这两个定义各有不同的方便之处.

命题 5.1.2　设 $x \in R(f)$, 则

$$x \in W(f) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \underline{P}_x(V(x,\varepsilon)) > 0.$$

证明　设 $x \in R(f), \varepsilon > 0$. 据定义, 存在 $N_\varepsilon > 0$, 使得

$$\sharp(\{i : f^i(x) \in V(x,\varepsilon), 0 \leqslant i \leqslant nN_\varepsilon\}) = \sum_{i=0}^{nN_\varepsilon - 1} \chi_{V(x,\varepsilon)}(f^i(x)) \geqslant n (\forall n > 0).$$

取正整数递增序列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使

$$\lim_{i\to\infty}\frac{1}{n_i}\sum_{r=0}^{n_i}\sharp(\{r|f^r(x)\in V(x,\varepsilon),0\leqslant r<n_i\})$$

存在. 记 $n_i=k_iN_\varepsilon+j_i,k_i\geqslant 0,0\leqslant j_i<N_\varepsilon,i=1,2,\cdots$. 于是有

$$\begin{aligned}&\lim_{i\to\infty}\frac{1}{n_i}\sharp(\{r|f^r(x)\in V(x,\varepsilon),0\leqslant r<n_i\})\\=&\lim_{i\to\infty}\frac{1}{k_iN_\varepsilon+j_i}\sharp(\{r|f^r(x)\in V(x,\varepsilon),0\leqslant r<k_iN_\varepsilon+j_i\})\\\geqslant&\lim_{i\to\infty}\frac{k_i}{k_iN_\varepsilon+j_i}=\frac{1}{N_\varepsilon}>0.\end{aligned}$$

这证明

$$\liminf_{i\to\infty}\frac{1}{n}\sharp(\{r|f^r(x)\in V(x,\varepsilon),0\leqslant r<n\})>0.$$

现设 $x\notin W(f)$. 据定义, 存在 $\varepsilon>0$, 使对任意 $N>0$, 存在正整数递增序列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, 有

$$\sharp(\{r|f^r(x)\in V(x,\varepsilon),0\leqslant r<n_iN\})<n_i,\quad\forall i>0.$$

因此有

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty}\sharp(\{r|f^r(x)\in V(x,\varepsilon),0\leqslant r<n\})\\\leqslant&\lim_{i\to\infty}\frac{1}{n_iN_\varepsilon}\sharp(\{r|f^r(x)\in V(x,\varepsilon),0\leqslant r<n_iN\})\\\leqslant&\frac{n_i}{n_iN}=\frac{1}{N}.\end{aligned}$$

由 N 的任意性, 即得

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sharp(\{i|f^i(x)\in V(x,\varepsilon),0\leqslant i<n\})=0.$$

证毕. □

命题 5.1.3 $W(f)\subset S(f)$, 即弱几乎周期点是 f 的支撑点 (见附录 B).

证明 设 $x\in W(f),\varepsilon>\delta>0$. 据定义, 存在 $N_\varepsilon>0$, 使

$$\sharp(\{r|f^r(x)\in V(x,\varepsilon),0\leqslant r<nN_\varepsilon\})\geqslant n,\quad\forall n>0.$$

存在正整数递增子列 $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$, 使

$$\frac{1}{n_jN_\varepsilon}\sum_{i=0}^{n_jN_\varepsilon-1}\delta_{f^i(x)}\to m\in M(X,f)\quad(j\to\infty).$$

显然

$$\frac{1}{n_jN_\varepsilon}\sum_{i=0}^{n_jN_\varepsilon-1}\delta_{f^i(x)}(V(x,\delta))=\frac{1}{n_jN_\varepsilon}\sharp(\{i|f^i(x)\in V(x,\delta),0\leqslant i<n_jN_\varepsilon\})$$
$$\geqslant\frac{n_j}{n_jN_\varepsilon}=\frac{1}{N_\varepsilon}>0,\quad\forall j>0.$$

据引理 4.1.13, 有

$$m(V(x,\varepsilon))\geqslant m(\overline{V(x,\delta)})\geqslant\limsup_{j\to\infty}\frac{1}{n_jN_\delta}\sum_{i=0}^{n_jN_\delta-1}\delta_{f^i(x)}(\overline{V(x,\delta)})$$
$$\geqslant\limsup_{j\to\infty}\frac{1}{n_jN_\delta}\sum_{i=0}^{n_jN_\delta-1}\delta_{f^i(x)}(V(x,\delta))\geqslant\frac{1}{N_\delta}>0,$$

即 x 是 f 的支撑点. □

命题 5.1.4　$\omega(x,f)=S_m,\forall m\in M_x\Leftrightarrow x\in W(f)$.

证明　设 $x\in W(f),\varepsilon>0$. 类似命题 5.1.2, 可以证明 $m((V(x,\varepsilon)))>0,m\in M_x$. 设 $k>0,U_k$ 是 $f^k(x)$ 的任意开邻域. 显然 $f^{-k}(U_k)$ 是 x 的开邻域, 故 $m(U_k)=m(f^{-k}(U_k))>0$. 因为 $\mathrm{orb}(x)$ 在 $\omega(x,f)$ 中稠密, 故 $\omega(x,f)$ 的每一非空开集包含某一个 $f^k(x),k>0$, 因而有正测度. 易见, $\omega(x,f)$ 是 m 的支撑, 即 $\omega(x,f)=S_m,\forall m\in M_x$.

下设 $x\notin W(f)$. 据定义, 存在 $\varepsilon>0$, 使对任意 $N>0$, 存在正整数递增序列 $\{n_j\}_{j=1}^\infty$, 有

$$\sharp(\{r|f^r(x)\in V(x,\varepsilon),0\leqslant r<n_jN\})<n_j,\quad\forall j>0.$$

显然有

$$\frac{1}{n_jN}\sum_{i=0}^{n_jN-1}\delta_{f^i(x)}\to m.$$

据引理 4.1.13, 有

$$m(V(x,\varepsilon))\leqslant\liminf_{j\to\infty}\frac{1}{n_jN}\sum_{i=0}^{n_jN-1}\delta_{f^i(x)}(V(x,\varepsilon))$$
$$=\liminf_{j\to\infty}\frac{1}{n_jN}\sharp(\{i|f^i(x)\in V(x,\varepsilon),0\leqslant i<n_jN\})$$
$$\leqslant\liminf_{j\to\infty}\frac{n_j}{n_jN}=\frac{1}{N}.$$

由 N 的任意性, 得 $m(V(x,\varepsilon))=0$, 即 x 不是 m 的支撑点. 因而 $\omega(x,f)$ 不是 m 的支撑, 即 $\omega(x,f)\neq S_m$. □

命题 5.1.5 $x \in W(f) \Leftrightarrow x \in C_x = S_m, \forall m \in M_x$.

证明 据命题 5.1.4,

$$x \in W(f) \Leftrightarrow S_m = \overline{\bigcup_{\mu \in M_x} S_\mu}, \quad \forall m \in M_x \Leftrightarrow S_m = \omega(x,f) \forall m \in M_x. \qquad \square$$

定理 5.1.6 设 $x \in R(f)$. 由前述诸命题, 得

$$\begin{aligned} x \in W(f) &\Leftrightarrow \underline{P}_x(V(x,\varepsilon)) > 0, \forall \varepsilon > 0 \\ &\Leftrightarrow x \in C_x = S_m; \forall m \in M_x \\ &\Leftrightarrow S_m = \omega(x,f), \forall m \in M_x. \end{aligned}$$

5.1.2 拟弱几乎周期点

定义 5.1.7 点 $x \in X$ 叫做 f 的拟弱几乎周期点, 如果对任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 N_ε 和子序列 $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ 使得基数

$$\sharp(\{r | f^r(x) \in V(x,\varepsilon), 0 < r < n_i N_\varepsilon\}) \geqslant n_i, \quad \forall i > 0. \tag{5.1.2}$$

拟弱几乎周期性是弱几乎周期性的条件放宽. 用 $QW(f)$ 表示 f 的全体拟弱几乎周期点的集合, 容易直接证明拟弱几乎周期点集对 f 亦不变, 即 $f(QW(f)) \subset QW(f)$. 显然, $A(f) \subset W(f) \subset QW(f)$. 我们将举例说明拟弱几乎周期点不一定是弱几乎周期点, 而且回复点也不一定是拟弱几乎周期点. 因此, 拟弱几乎周期性也是回复性的新层次.

容易证明

$$x \in QW(f) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, N(x, V(x,\varepsilon)) \text{ 有正上密度}.$$

这也可以看作是拟弱几乎周期点的等价定义.

命题 5.1.8 $QW(f) \subset S(f)$, 即拟弱几乎周期点是 f 的支撑点.

证明 设 $x \in QW(f), \varepsilon > 0$. 据定义, 存在 $N_\varepsilon > 0$ 和正整数递增序列 $\{n_j\}_{j=1}^\infty$, 使得

$$\sum_{i=0}^{n_j N\varepsilon - 1} \chi_{V(x,\varepsilon)}(f^i(x)) \geqslant n_j, \quad \forall j > 0,$$

或

$$\frac{1}{n_j} \sum_{i=0}^{n_j N\varepsilon - 1} \chi_{V(x,\varepsilon)}(f^i(x)) \geqslant 1, \quad \forall j > 0.$$

不妨设存在极限且

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_jN_\varepsilon}\sum_{i=0}^{n_jN_\varepsilon-1}\delta_{f^i(x)}\to m\in M(X,f).$$

据引理 4.1.13, 易见

$$\begin{aligned}m(V(x,\varepsilon))&\geqslant\lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_jN_\varepsilon}\sum_{i=0}^{n_jN_\varepsilon-1}\delta_{f^i(x)}V(x,\varepsilon)\\&\geqslant\frac{n_j}{n_jN_\varepsilon}=\frac{1}{N_\varepsilon}>0.\end{aligned}$$

□

命题 5.1.9　设 $x\in R(f)$, 则 $x\in QW(f)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\overline{P}_x(V(x,\varepsilon))>0$.

证明　设 $x\in QW(f),\varepsilon>0$. 据定义, 存在 N_ε 和正整数递增序列 $\{n_j\}_{j=1}^\infty$, 使得

$$\sum_{i=0}^{n_jN_\varepsilon-1}\chi_{V(x,\varepsilon)}(f^i(x))\geqslant n_j,\quad\forall j>0$$

并使极限

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_jN_\varepsilon-1}\chi_{V(x,\varepsilon)}(f^i(x))=\delta>0$$

存在. 于是有

$$\frac{1}{n_jN_\varepsilon}\sum_{i=0}^{n_jN_\varepsilon-1}\chi_{V(x,\varepsilon)}(f^i(x))\geqslant\frac{\delta}{N_\varepsilon}>0.$$

因此

$$\begin{aligned}\overline{P}_x(V(x,\varepsilon))&=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\chi_{V(x,\varepsilon)}(f^i(x))\\&\geqslant\limsup_{j\to\infty}\frac{1}{n_jN_\varepsilon}\sum_{i=0}^{n_jN_\varepsilon-1}\chi_{V(x,\varepsilon)}(f^i(x))\geqslant\frac{\delta}{N_\varepsilon}>0.\end{aligned}$$

下设 $\overline{P}_x(V(x,\varepsilon))>0$. 据定义, $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N_\varepsilon>0$ 和正整数递增序列 $\{n_j\}_{j=1}^\infty$, 使得

$$\frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1}\chi_{V(x,\varepsilon)}(f^i(x))\geqslant n,\quad\forall n>0.$$

易见有 $\lim\limits_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\sum\limits_{i=0}^{n_j-1}\chi_{V(x,\varepsilon)}(f^i(x))\geqslant 1$, 或等价的 $\sum\limits_{i=0}^{n_j-1}\chi_{V(x,\varepsilon)}(f^i(x))\geqslant n_j,\forall j>0$. 显然 $x\in QW(f)$.

□

命题 5.1.10 $x\in R(f)$, 则 $\overline{P}_x(V(x,\varepsilon))>0,\forall\varepsilon>0\Rightarrow x\in C_x$.

证明 设 $\overline{P}_x(V(x,\varepsilon))>0$ 但 $x\notin C_x$. 因为 $C_x=\overline{\bigcup\limits_{m\in M_x}S_m}$, 故存在 $\delta>0$ 和 $m\in M_x$ 使得 $V(x,\delta)\cap S_m=\varnothing$, 因而 $m(V(x,\delta))=0$. 设有正整数递增序列 $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$, 使极限

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1}\chi_{V(x,\frac{\delta}{2})}(f^i(x))>0\text{ 存在},$$

必要时取子序列. 可设

$$m_j=\frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1}\delta_{f^i(x)}\to m\in M_x.$$

于是有

$$\begin{aligned}m(V(x,\delta))&\geqslant m\left(\overline{V\left(x,\frac{\delta}{2}\right)}\right)\geqslant\limsup_{j\to\infty}m_j\left(\overline{V\left(x,\frac{\delta}{2}\right)}\right)\\&\geqslant\limsup_{j\to\infty}m_j\left(V\left(x,\frac{\delta}{2}\right)\right)=\limsup_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1}\chi_{V(x,\frac{\delta}{2})}(f^i(x))>0,\end{aligned}$$

矛盾, 即 $x\in C_x$. □

命题 5.1.11 $x\in R(f)$, 则 $x\in C_x\Rightarrow\omega(x,f)=\overline{\bigcup\limits_{m\in M_x}S_m}$.

证明 设 $x\in C_x$. 于是有 $C_x\subset\omega(x,f)$. 因为 $\mathrm{orb}(x)$ 在 $\omega(x,f)$ 中稠密且 C_x 对 f 不变, 显然有 $C_x=\omega(x,f)=\overline{\bigcup\limits_{m\in M_x}S_m}$. □

命题 5.1.12 $\omega(x,f)=\overline{\bigcup\limits_{m\in M_x}S_m}\Rightarrow C_x=\omega(x,f)$.

证明从略.

命题 5.1.13 $x\in R(f)$, 则 $C_x=\omega(x,f)\Rightarrow x\in QW(f)$.

证明 设 $x\in\omega(x,f)=\overline{\bigcup\limits_{m\in M_x}S_m}$ 和 $\varepsilon>0$. 显然存在 $m\in M_x$, 使$V(x,\varepsilon)\cap S_m\neq\varnothing$. 于是有 $m(V(x,\varepsilon))>0$. 令 $N_\varepsilon>0$ 使 $m(V(x,\varepsilon))>\dfrac{1}{N_\varepsilon}$. 设有正整数递增序列 $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$, 使 $\dfrac{1}{n_jN_\varepsilon}\sum\limits_{i=0}^{n_jN_\varepsilon-1}\delta_{f^i(x)}\to m$, 必要时取子序列. 于是有

$$\begin{aligned}\frac{1}{N_\varepsilon}<m(V(x,\varepsilon))&\leqslant\liminf_{j\to\infty}\frac{1}{n_jN_\varepsilon}\sum_{i=0}^{n_jN_\varepsilon-1}\delta_{f^i(x)}(V(x,\varepsilon))\\&=\liminf_{j\to\infty}\frac{1}{n_jN_\varepsilon}\sum_{i=0}^{n_jN_\varepsilon-1}\chi_{V(x,\varepsilon)}(f^i(x)).\end{aligned}$$

可设

$$\frac{1}{N_\varepsilon} \leqslant \frac{1}{n_j N_\varepsilon} \sum_{i=0}^{n_j N_\varepsilon - 1} \chi_{V(x,\varepsilon)}(f^i(x)), \quad \forall j > 0.$$

由此即得

$$\sum_{i=0}^{n_j N_\varepsilon - 1} \chi_{V(x,\varepsilon)}(f^i(x)) \geqslant n_j, \quad \forall j > 0.$$

据定义, $x \in QW(f)$. □

定理 5.1.14　设 $x \in R(f)$, 由前述诸命题, 得

(1) $x \in QW(f) \Leftrightarrow \overline{P}_x(V(x,\varepsilon)), \forall \varepsilon > 0$;

(2) $x \in C_x \Leftrightarrow \omega(x,f) = \overline{\bigcup_{m \in M_x} S_m} \Leftrightarrow C_x = \omega(x,f)$.

定理 5.1.15　$\mathrm{ent}(f) = \mathrm{ent}(f|_{M(f)}) = \sup_{x \in W(f)} \{\mathrm{ent}(f|_{\omega(x,f)})\}$.

证明　设 $m \in E(X,f)$. 据附录 B 和定理 1.24, 存在 $x \in W(f)$, 使得

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)} \to m$$

且 $S_m = \omega(x,f)$. 显然 $S_m \subset M(f), \forall m \in M(X,f)$. 据变分原理, $\mathrm{ent}(f|_{\omega(x,f)}) \geqslant h_m(f)$. 所以

$$\begin{aligned}\mathrm{ent}(f) &= \sup_{m \in E(X,f)} \{h_m(f)\} \leqslant \sup_{m \in E(X,f)} \{\mathrm{ent}(f|_{S_m})\} \\ &\leqslant \sup_{x \in W(f)} \{\mathrm{ent}(f|_{\omega(x,f)})\} \leqslant \mathrm{ent}(f|_{M(f)}) \leqslant \mathrm{ent}(f).\end{aligned}$$

□

5.2　测度中心的构造

定理 5.2.1　设 (X,f) 为紧致系统. 则 $M(f)$ 唯一存在.

证明　设

$$\mathscr{E} = \{E \in \mathscr{B}(X) | \overline{E} = E, f(E) \subset E, m(E) = 1, \forall m \in M(X,f)\},$$

$X \in \mathscr{E}$, 故 $\mathscr{E} \neq \varnothing$. $\mathscr{E}$ 对包含关系是偏序集合. 对每一 $m \in M(X,f), S_m \subset E, \forall E \in \mathscr{E}$, 故

$$E_0 = \bigcap_{E \in \mathscr{E}} E \supset S_m.$$

易见, $\overline{E_0} = E_0, f(\overline{E_0}) = E_0, m(E_0) = 1, \forall m \in M(X,f)$, 因而 $E_0 \in \mathscr{E}$ 且为 $\mathscr{E}$ 的唯一极小元 (见附录 A). 令 $M(f) = E_0$, 即是所求. 唯一性是显然的, 因为如果有两个测度中心, 它们的交也满足测度中心的条件. □

定理 5.2.2 $S(f)=M(f)$, 其中 $S(f)$ 表示 f 的全体支撑点的集合 (见附录 B).

证明 容易看出, $\overline{\bigcup_{m\in M(X,f)} S_m}\subset S(f)$. 不难证明, 如果 $\overline{\bigcup_{m\in M(X,f)} S_m}\neq S(f)$, 则 $x\in S(f)-\overline{\bigcup_{m\in M(X,f)} S_m}$ 是某个 $m\in M(X,f)$ 的支撑点, 因此 $m\Big(S(f),-\overline{\bigcup_{m\in M(X,f)} S_m}\Big)<1$, 矛盾 (见附录 B). □

定理 5.2.3 $W(f),QW(f)$ 是全概率集合, 而 $A(f)$ 不是.

证明 $W(f)$ 的子集合

$$\bigcup_{m\in E(X,f)}\left\{x\in W(f):\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)}\to m\right\}$$

对每一个 $m\in E(X,f)$ 都是满测度的, 因此 $W(f)$ 是绝对遍历测度 1 集合. 显然 $QW(f)$ 也是绝对遍历测度 1 集合.

设 $\sigma:\Sigma_2\to\Sigma_2$ 是两个符号的符号空间上的转移自映射. σ 是拓扑传递的但不是极小的, 即 σ 的每一个极小集都是 Σ_2 的无处稠密子集. 再者, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 乘积测度 m 是 σ 的一个遍历测度且以 Σ_2 为支撑[50]. 因为若 $x\in R(f)$, 则 $x\in A(f)\Leftrightarrow\omega(x,f)$ 是极小的, 故

$$\left\{x\in W(\sigma)\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{\sigma^i(x)}\to m\right.\right\}\cap A(\sigma)=\varnothing.$$

但上式左侧前者是 m 满测的, 故后者, 即 $A(\sigma)$ 包含在 m 的一个零测集内, 不是 m 测度 1 集合, 因而不是绝对遍历测度 1 集合. □

定理 5.2.4 $M(f)=\overline{W(f)}=\overline{QW(f)}$.

证明 据上述定理, $\overline{W(f)}$ 是绝对遍历测度 1 可测集合, 因而是全概率集合. 因此 $M(f)\subset\overline{W(f)}$. 另外, $M(f)=S(f)$, 故 $\overline{W(f)}\subset M(f)$. 同样有 $M(f)=\overline{QW(f)}$. □

定理 5.2.5 $W(f^m)=W(f)$, $QW(f^m)=QW(f),\forall m>0$.

证明 易从定义直接证明 $W(f^m)\subset W(f),\forall m>0$. 下面证明

$$W(f)\subset W(f^m),\quad \forall m>0.$$

设 $x\in W(f),m>0$. 易证

$$\omega(x,f)=\bigcup_{i=0}^{n-1}\omega(f^i(x),f^m)$$

且

$$f(\omega(f^i(x),f^m))=\omega(f^{i+1}(x),f^m),\quad i=0,1,\cdots,m-1,\quad \omega(f^m(x),f^m)=\omega(x,f^m).$$

因此

$$\{\omega(f^i(x),f^m)\}_{i=0}^{m-1}$$

对 f 是 m 周期的. 设 $0\leqslant j<l<m$. 记 $\omega_{j,l}=\omega(f^j(x),f^m)\cap\omega(f^l(x),f^m)$(可能是空集). 易证 $\omega_{j,l}$ 对 f^m 不变且 $f^i(\omega_{j,l})_{i=0}^{m-1}$ 对 f 也是 m 周期的. 由此易于推出, 若 $\omega_{j,l}\neq\omega(f^j(x),f^m)$, 则 $\omega_{j,l}\neq\omega(f^l(x),f^m)$, $\omega_{j,l}$ 是 $\omega(f^j(x),f^m)$ 和 $\omega(f^l(x),f^m)$ 的无处稠密子集且 $f^j(x),f^l(x)\notin\omega_{j,l}$. 设 $\{\omega(f^i(x),f^m)\}_{i=0}^{m-1}$ 对 f 的最小周期为 k, 显然 $m|k$, 即 k 整除 m. 分三种情形.

(1) 当 $k=1$ 时, 这时 $x\in\omega(x,f^m)=\omega(f^i(x),f^m),i=0,1,2,\cdots,m-1$. 设 $s>0$, 对每一个 $0\leqslant i<m$, 存在最小的整数 $k_i>0$, 使得 $f^{k_im+i}(x)\in V(x,\varepsilon)$. 据连续性, 存在 $\varepsilon\geqslant\delta>0$, 使

$$f^{k_im+i}(V(x,\delta))\subset V(x,\varepsilon),\quad i=0,1,\cdots,m-1.$$

对 $\delta>0$, 存在 $N_\delta>0$, 使

$$\sharp(\{r|f^r(x)\in V(x,\delta),0\leqslant r<nN_\delta\})\geqslant n,\quad \forall n>0. \tag{5.2.1}$$

记 $r=l\times m+i,0\leqslant i<m,0<l$, 则 $f^r(x)\in V(x,\delta)$ 蕴涵

$$f^{(k_{m-1}+l+1)m}(x)=f^{k_{m-1}m+m-i}f^r(x)\in f^{k_{m-1}m+m-i}(V(x,\delta))\subset V(x,\varepsilon).$$

记 $M=\max_{i=0,1,\cdots,m-1}\{k_im+i\}$, 则当 $0\leqslant r<nN_\delta$ 时,

$$(k_{m-1}+l+1)m\leqslant nN_\delta+M<n(N_\delta+M).$$

因此 (5.2.1) 蕴涵

$$\sharp(\{r|f^{mr}(x)\in V(x,\varepsilon),0\leqslant mr<n(N_\delta+M)\})\geqslant n,\quad \forall n>0.$$

取 $N_\varepsilon=N_\delta+M$, 即证明 $x\in W(f^m)$.

(2) 当 $k=m$ 时, 这时 $\{\omega(f^i(x),f^m)\}_{i=0}^{m-1}$ 中元素两两不相交. 因此存在 $\delta>0$, 使

$$V(x,\delta)\cap\omega(f^i(x),f^m)=\varnothing,\quad i=1,2,\cdots,m-1.$$

易证 $f^r(x)\in V(x,\delta)\Rightarrow m|r$. 下设 $\delta>\varepsilon>0$. 据定义, 存在 $N_\varepsilon>0$, 使

$$\sharp(\{r|f^r(x)\in V(x,\varepsilon),0\leqslant r<nN_\varepsilon\})\geqslant n,\quad \forall n>0.$$

因为 $f^r(x) \in V(x,\varepsilon) \subset V(x,\delta)$, 故 $m|r$. 显然上式蕴涵 $x \in W(f^m)$.

(3) 当 $kl = m, k > 0, l > 0$ 时, 据假设 $\{\omega(f^i(x), f^m)\}_{i=0}^{m-1}$ 对 f 是最小 k 周期的, 故其中元素两两不相交. 利用 (2) 中方法, 可以证明 $x \in W(f^m)$. 记 $g = f^k$, 则 $g^l = f^m$, 有

$$\omega(x,g) = \bigcup_{i=0}^{k-1} \omega(g^i(x), g^l)$$

和

$$g(\omega(x,g^l)) = f^k(\omega(x,f^m)) = \omega(x,f^m) = \omega(x,g^l),$$

即 $\{\omega(g^i(x),g^l)\}_{i=0}^{l}$ 对 g 是 1 周期的. 重复 (1), 即可以证明 $x \in W(g^l) = W(f^m)$.

同样可以证明, $QW(f^m) = QW(f), \forall m > 0$. □

定理 5.2.6 $M(f) = M(f^m), \forall m > 0$.

这是前两个定理的直接推论.

5.3 例　子

本节通过举例说明, 弱几乎周期点可以不是几乎周期点; 拟弱几乎周期点可以不是弱几乎周期点. 这说明弱几乎周期性和拟弱几乎周期性都是新的回复性. 下面设 (X,f) 为紧致系统.

例 5.3.1 存在紧致系统 (X,f), 满足 $M(f) \subsetneqq \overline{R(f)}$.

首先构造例子, 说明测度中心可以真包含于运动中心, 即回复点集的闭包. 因为 $M(f) = \overline{W(f)}$ 且 $M(f)$ 是闭集, 所以存在不是弱几乎周期点的回复点, 而且存在不是弱几乎周期点的极限点的几乎周期点. 因此, 弱几乎周期性不同于几乎周期性.

设 $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ 为两个符号 $\{0,1\}$ 生成的符号空间上的转移自映射. Σ_2 上的度量定义如下:

$$\rho(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}, \quad \forall x = (x_0x_1\cdots), y = (y_0y_1\cdots) \in \Sigma_2.$$

$$\begin{cases} \sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2, \\ (x_0x_1\cdots) \mapsto (x_1x_2\cdots) \end{cases} \tag{5.3.1}$$

是其上转移自映射. 易见 x, y 充分靠近等价于存在充分大的 $N > 0$ 使得 $n < N$ 时, $x_n = y_n$.

记 $P = (i_0i_1\cdots i_{n-1})$ 和 $Q = (j_0j_1\cdots j_{m-1})$ 是由 $\{0,1\}$ 生成的有限序列, 它们的长度, 即坐标分量的个数 $|P|$和$|Q|$ 分别是 n 和 m. 记 $PQ = (i_0i_1\cdots i_{n-1}j_0j_1\cdots j_{m-1})$,

其长度为 $n+m$. 若存在 $k \geqslant 0$, 使 $x_k = i_0, x_{k+1} = i_1, \cdots, x_{k+s-1} = i_{s-1}$, 就说 P 出现在 x 的第 k 个坐标处或出现在 x 内.

构造 $x \in \Sigma_2$ 如下:

令 $P_0 = (1,0), P_1 = P_0Q_0, Q_0 = (00), |Q_0| = |P_0| \times 1$;

$P_2 = P_0Q_0P_1Q_1 = P_1P_1Q_1, Q_1 = (00\cdots0), |Q_1| = |P_0Q_0P_1| \times 2 = |P_1P_1| \times 2$.

归纳地, 对 $n > 0$, 令

$$P_n = P_0Q_0P_1Q_1\cdots P_{n-1}Q_{n-1} = P_{n-1}P_{n-1}Q_{n-1}, \quad Q_{n-1} = (00\cdots0),$$

$$|Q_{n-1}| = |P_0Q_0\cdots P_{n-1}| \times n = |P_{n-1}P_{n-1}| \times n.$$

记 $x = P_0Q_0P_1Q_1\cdots P_nQ_n\cdots \in \Sigma_2$. 从上述构造中可看出, 对每一个 $n > 0, P_n$ 中前 $|P_0Q_0\cdots P_{n-1}| = |P_{n-1}P_{n-1}|$ 个坐标与 x 的前 $|P_{n-1}P_{n-1}|$ 个坐标对应相等. 这说明 $x \in R(\sigma|_{\omega(x,\sigma)})$. 因 $|Q_n| \to \infty(n \to \infty)$, 易证 $\omega(x,\sigma)$ 只含一个周期点, 即不动点 $e = (00\cdots)$. 再者, $\omega(x,\sigma)$ 是无孤立点的紧致集合, 故不可数. 另外, 易见 $\overline{R(\sigma|_{\omega(x,\sigma)})} = \omega(x, \sigma|_{\omega(x,\sigma)})$. 考虑在上的子转移 $\sigma|_{\omega(x,\sigma)} : \omega(x,\sigma) \to \omega(x,\sigma)$, 证明:

(1) $W(\sigma|_{\omega(x,\sigma)}) = \{e\}$, 因而 $M(\sigma|_{\omega(x,\sigma)}) = \{e\}$和$M(\sigma|_{\omega(x,\sigma)}) \neq \overline{R(\sigma|_{\omega(x,\sigma)})} = \omega(x, \sigma|_{\omega(x,\sigma)})$, 即 $\sigma|_{\omega(x,\sigma)}$ 的测度中心包含于其运动中心.

(2) $\sigma|_{\omega(x,\sigma)}$ 是混沌的, 即存在不可数混沌集 $S \subset \omega(x,\sigma)$ 满足:

① $\limsup\limits_{n\to\infty} \rho(\sigma^n(y), \sigma^n(z)) \geqslant 1, \forall y, z \in S, y \neq z$;

② $\liminf\limits_{n\to\infty} \rho(\sigma^n(y), \sigma^n(z)) = 0, \forall y, z \in S$.

(1) 的证明. 据定义,

$$P_0Q_0\cdots P_n = P_nP_n = P_{n-1}P_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1}P_{n-1}Q_{n-1}$$

和

$$|Q_{n-1}| = |P_{n-1}P_{n-1}| \times n,$$

因此

$$\frac{1}{|P_0Q_0\cdots P_n|}\sharp(\{i|x_i = 1, 0 \leqslant i < |P_0Q_0\cdots P_n|\}) \leqslant \frac{2|P_{n-1}P_{n-1}|}{2(n+1)|P_{n-1}P_{n-1}|} = \frac{1}{n+1},$$

$$\forall n > 0.$$

设 $n > 0$, 令 $T_n = P_0Q$(第 1 个坐标是 1) 是出现在 x 内的任意有限序列, $|T_n| = |P_0Q_0\cdots P_n|$. 我们证明, T_n 可以出现在 P_{n+1} 内. 显然, 存在 $j > n, T_n$ 可以出现在 $P_j = P_{j-1}P_{j-1}Q_{j-1}$ 内. 设 $j > n+1$, 这时 $|P_{j-1}| > |T_n|$, 故 T_n 可以出现在 $P_{j-1}, P_{j-1}P_{j-1}$ 或 $P_{j-1}Q_{j-1}$ 内, 但不能出现在 Q_{j-1} 内. 因 $|Q_{j-2}| \geqslant |Q_n| > |T_n|$, 故若 T_n 出现在 $P_{j-1}P_{j-1} = P_{j-2}P_{j-2}Q_{j-2}P_{j-1}$ 内, 则只能出现在 $P_{j-2}P_{j-2}Q_{j-2}(=$

P_{j-1}) 或 $Q_{j-2}P_{j-1}$ 内. 但 T_n 出现在 $Q_{j-2}P_{j-1}$ 内蕴涵 T_n 出现在 P_{j-1} 内. 同样, 若 T_n 出现在 $P_{j-1}Q_{j-1} = P_{j-2}P_{j-2}Q_{j-2}Q_{j-1}$ 内亦只能出现在 $P_{j-2}P_{j-2}Q_{j-2} = P_{j-1}$ 内. 综上, 我们证明了 T_n 可以出现在 P_{j-1} 内. 上述过程可以重复到 $j = n+1$ 为止, 即 T_n 可以出现在 P_{n+1} 内.

显然, 出现在 $P_{n+1} = P_0Q_0\cdots P_nQ_n$ 内长度为 $|P_0Q_0\cdots P_n|$ 的任意有限序列, 其坐标中等于 1 的个数不大于 $P_0Q_0\cdots P_n$ 中坐标等于 1 的个数, 即不大于 x 的前 $|P_0Q_0\cdots P_n|$ 个坐标中等于 1 的个数. 因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} &\geqslant \frac{1}{|P_0Q_0\cdots P_n|}\sharp(\{i|x_i = 1, 0 \leqslant i < |P_0Q_0\cdots P_n|\}) \\ &\geqslant \frac{1}{|P_0Q_0\cdots P_n|}\sharp(\{i|x_{k+i} = 1, 0 \leqslant i < |P_0Q_0\cdots P_n|\}), \quad \forall n > 0,\end{aligned}$$

其中 $k \geqslant 0, k + |P_0Q_0\cdots P_n| \leqslant |P_{n+1}|$.

设 $y \in R(\sigma|_{\omega(x,\sigma)})$ 但 $y \neq e$. 取 $\varepsilon = 1$, 易见 $y, z \in \omega(x,\sigma)$, 则 $\rho(y,z) < \varepsilon \Leftrightarrow y_0 = z_0$(注意, $y_n \neq z_n, \forall n > 0$ 是不可能的). 必要时可用 $\sigma^k(y)$ 代替 $\sigma(y)$, 可设 $y = P_0Q_0\cdots$. 因为出现在 y 内的有限序列一定出现在 x 内, 故

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sharp(\{r|\sigma^r(y) \in V(y,\varepsilon), 0 \leqslant r < n\}) &= \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sharp(\{r|y_r = 1, 0 \leqslant r < n\}) \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{|P_0Q_0\cdots P_n|}\sharp(\{r|y_r = 1, 0 \leqslant r < |P_0Q_0\cdots P_n|\}) \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\sharp(\{r|x_r = 1, 0 \leqslant r < |P_0Q_0\cdots P_n|\}) \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.\end{aligned}$$

因此, $y \notin W(\sigma|_{\omega(x,\sigma)})$, 故 $W(\sigma|_{\omega(x,\sigma)}) = \{e\}$. (1) 显然蕴涵 $\mathrm{ent}(\sigma|_{\omega(x,\sigma)}) = 0$. (1) 证毕.

(2) 的证明. 令 $S = \{y \in \omega(x,\sigma)|\omega(y,\sigma) = \omega(x,\sigma)\}$. 据拓扑传递性的性质, S 是 $\omega(x,\sigma)$ 的可数个处处稠密开集的交, 即 G_δ 型稠密集, 故 S 不可数.

设 $y \in S$. 记 $S_y = \{z \in S|\mathrm{orb}(z) \cap \mathrm{orb}(y) \neq \varnothing\}$. 我们证明, S_y 是可数的. 设 $z \in S_y$, 即存在 $i > 0, j > 0$ 使得 $\sigma^i(z) = \sigma^j(y)$. 对固定的 $\{i,j\}$, 满足这个条件的 $z \in S_y$, 是有限的, 不超过 2^j. 但整数偶 $\{i,j\}$ 是可数的, 故 S_y 可数.

设 $y, z \in S$. 易见 $S_y \cap S_z \neq \varnothing \Rightarrow S_y = S_z$. 由此易证 S 内存在一个不可数子集 S_0, 其中任何两点的轨道不相交. 下面证明 S_0 是 $\sigma|_{\omega(x,\sigma)}$ 的混沌集.

设 $y, z \in S_0, y \neq z$. 因为 $\mathrm{orb}(y) \cap \mathrm{orb}(z) = \varnothing$, 易见对任意大的 $N > 0$, 存在 $k > N$, 使得 $\sigma^k(y), \sigma^k(z)$ 的第一个坐标不同. 据定义, $\limsup\limits_{n\to\infty}\rho(\sigma^n(y),\sigma^n(z)) \geqslant 1$. ① 获证.

设 $y, z \in S_0$. 易见 $\liminf\limits_{n\to\infty} \rho(\sigma^n(y), \sigma^n(z)) = 0 \Leftrightarrow \forall N > 0, \exists k > 0$, 使得 $\sigma^k(y)$ 和 $\sigma^k(z)$ 的前 N 个坐标对应相等. 由此易见, 对于任意的 $i > 0, j > 0$,

$$\liminf_{n\to\infty} \rho(\sigma^{n+i}(y), \sigma^{n+j}(z)) = 0.$$

因此, 下面总是可以假设 y, z 都是以 P_0Q_0 开始的. 构造 Σ_2 的新点 $w = (w_0w_1\cdots)$ 如下:

$$w_i = \begin{cases} 0, & \text{如果 } y_i = z_i = 0, \\ 1, & \text{其他情形}, \quad \forall i \geqslant 0. \end{cases}$$

由 w 的定义和 (1) 的证明, 有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|P_0Q_0\cdots P_n|} \sharp(\{i|w_i = 1, 0 \leqslant i < |P_0Q_0\cdots P_n|\}) \\
\leqslant &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|P_0Q_0\cdots P_n|} (\sharp(\{i|y_i = 1, 0 \leqslant i < |P_0Q_0\cdots P_n|\}) \\
&+\sharp(\{i|z_i = 1, 0 \leqslant i < |P_0Q_0\cdots P_n|\})) \\
\leqslant &\lim_{n\to\infty} \frac{2}{|P_0Q_0\cdots P_n|} \sharp(\{i|x_i = 1, 0 \leqslant i < |P_0Q_0\cdots P_n|\}) \\
\leqslant &\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

由此易由反证法证明, 对任意 $N > 0$, 存在 $n > 0$, 使得 w 的前 $|P_0Q_0\cdots P_n|$ 个坐标中从某个开始连续 N 个均为零. 从 w 的定义可以看出, 这蕴涵 $\liminf\limits_{n\to\infty} \rho(\sigma^n(y), \sigma^n(z)) = 0$. ② 得证.

例 5.3.2　存在紧致系统 (X, f), 满足 $\overline{A(f)} \subsetneqq M(f)$.

我们构造一个符号空间转移自映射的子系统如下:

设 Σ_2 是两个符号 $S = \{0, 1\}$ 上的符号空间, 并取下面的一个拓扑度量:

$$\rho(x, y) = \max\left\{\frac{1}{n+1} | x_n \neq y_n, \forall n > 0\right\}, \quad \forall x, y \in \Sigma_2,$$

$$\begin{cases} \sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2, \\ (x_0x_1\cdots) \mapsto (x_1x_2\cdots) \end{cases} \tag{5.3.2}$$

是其上转移自映射.

为了叙述方便, 引进几个术语. S 上有限符号的排列, 如 $A = (a_0a_1\cdots a_n), B = (b_1b_2\cdots b_m)$ 叫做其上符号段. 符号段的坐标分量的个数叫做它们的长度, 记作 $L(A), L(B)$. $(a_ia_{i+1}\cdots a_{i+j})$ 叫做 A 的子符号段, 其中 $0 \leqslant i \leqslant i+j \leqslant n$. 记 $AB = (a_1\cdots a_nb_1\cdots b_m)$. 由 0 组成的长度为 $n > 0$ 的符号段记为 O_n. 说 B 包

含 $i>0$ 个 A, 如果在 B 内有 i 个处于不同位置上的子符号段等于 A, 其中最左面的一个称为 B 含的第一个 A. 若 $x\in\Sigma_2, A$ 可以出现在 x 内按同样方式定义.

下面构造 $x\in\Sigma_2$. 令

$P_0=(11111111), L(P_0)=2^3$;

$P_1=Q_0O_5$, 其中 $Q_0=X_3=(111), L(P_0)=2^3$;

$P_2=Q_1(00\cdots 0)$, 其中 $Q_1=Q_0X_4O_1, X_4$ 是 P_0P_1 的前 4 项的符号段, P_2 中 Q_1 后面的 0 的个数由使 $L(P_2)=2^4$ 决定;

对 $i>2$, 归纳地假设 $P_i, P_{i-1},\cdots P_0$ 和 $Q_{i-1}, Q_{i-2},\cdots Q_0$ 已定义. 令 $P_{i+1}=Q_i(00\cdots 0)$, 其中 $Q_i=Q_{i-1}\cdots Q_0X_{i+3}O_i$, X_{i+3} 是 $P_0P_1\cdots P_i$ 前 $i+3$ 项的符号段 (易于验证 $L(P_0P_1\cdots P_i)>i+3$), P_{i+1} 中 Q_i 后面的 0 的个数由使 $L(P_{i+1})=2^{i+3}$ 决定.

按归纳法, 我们已经定义 $P_i, \forall i>0$. 记

$$x=P_0P_1\cdots P_i\cdots\in\Sigma_2.$$

由上述构造易见, X_i 是 x 的前 i 项的符号段, $i>2$. 这证明 x 是 σ 的回复点, 即 $x\in R(\sigma)$. 考虑子转移

$$\sigma|_{\omega(x,\sigma)}:\omega(x,\sigma)\to\omega(x,\sigma).$$

下面计算 $L(Q_i)$ 和 $P_{i+1}Q_i(00\cdots 0)$ 中 Q_i 后面的 0 的个数. 据上述构造, $Q_0=X_3, L(Q_0)=3; Q_1=Q_0X_4O_1, L(Q_1)=2^3$. 下设 $i>1$. 因为 $Q_i=Q_{i-1}\cdots Q_0X_{i+3}O_i$, 故

$$L(Q_i)=L(Q_{i-1})+\cdots+L(Q_0)+i+3+i,$$

$$L(Q_{i-1})=L(Q_{i-2})+\cdots+L(Q_0)+i+2+i-1.$$

两式相减, 得

$$L(Q_i)=2L(Q_{i-1})+2.$$

易由归纳法证明

$$L(Q_i)=5\cdot 2^i-2,\quad \forall i>1.$$

据上述构造, $L(P_{i+1})=2^{i+3}, \forall i>1$. 因此 $P_{i+1}=Q_i(00\cdots 0)$ 中 Q_i 后面 0 的个数为

$$2^{i+3}-5\cdot 2^i+2=3\cdot 2^i+2,\quad \forall i>1.$$

因此

$$P_{i+1}=Q_iO_{3\cdot 2^i+2},\quad \forall i>1.$$

有

$$x = P_0P_1\cdots P_i\cdots = P_0Q_0O_5\cdots Q_iO_{3\cdot 2^i+2}\cdots.$$

显然不动点 $e=(00\cdots)\in\omega(x,\sigma)$.

定义 5.3.1 设 A 和 T_k 为符号段, $L(T_k)=k, k>0$. 若存在整数 $N_k>0$, 使得 $L(A)|N_k$(整除) 且 A 中前 iN_k 项的符号段至少含 i 个 $T_k, i=1,2,\cdots,\dfrac{L(A)}{N_k}$, 我们就说 A 对 T_k 关于 N_k 满足 W 条件.

命题 5.3.2 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m(m>3)$ 都对 T_k 关于 N_k 满足 W 条件, 则 $A_1A_2\cdots A_m$ 亦对 T_k 关于 N_k 满足 W 条件.

由定义直接验证, 从略.

命题 5.3.3 设 $y\in\Sigma_2$, 且 Y_k 表 y 的前 k 项的符号段, 即 $Y_k=(y_0y_1\cdots y_{k-1})$. 如果对任意 $k>0$, 存在 $A_1,A_2,\cdots$ 和 N_k, 使得 $y=A_1A_2\cdots$ 且每个 A_i 都对 Y_k 关于 N_k 满足 W 条件, 则 $y\in W(\sigma)$, 即 y 是 σ 的弱几乎周期点.

证明 对任意的 $0<\varepsilon<1$, 存在 $k>0$, 使得 $\dfrac{1}{k+1}<\varepsilon\leqslant\dfrac{1}{k}$. 由 ρ 的定义, 易见 $\sigma^r(y)\in V(y,\varepsilon)$ 当且仅当 $\sigma^r(y)$ 的前 k 项的符号段为 $Y_k, r>0$. 对这个 k, 取 $A_1,A_2,\cdots$ 和 N_k, 使得 $y=A_1A_2\cdots$ 且每个 A_i 都对 Y_k 关于 N_k 满足 W 条件. 据命题 5.3.2, 易见基数

$$\sharp(\{r|\sigma^r(y)\in V(y,\varepsilon), 0\leqslant r\leqslant iN_k-1\})\geqslant i,\quad \forall i>0.$$

据定义 $y\in W(\sigma)$. □

命题 5.3.4 设 $x=P_0P_1\cdots$ 如前所定义, 则 $x\in W(\sigma)-A(\sigma)$.

证明 对任意 $k\geqslant 3$, 记 $A_1=P_0P_1\cdots P_{k-3}$ 和 $A_m=P_{k+m-4},\forall m\geqslant 2$. 于是有 $x=A_1A_2\cdots$. 令 $N_k=2^k$. 注意到 $L(A_1)=L(P_0)+\cdots+L(P_{k-3})=2^3+2^3+2^4+\cdots+2^{k-1}=2^k=N_k$ 和 $L(A_m)=L(P_{k+m-4})=2^{k+m-2}(m\geqslant 2)$, 于是有 $N_k|L(A_i),\forall i\geqslant 1$.

断言: Q_{k+m} 中至少包含 2^{m+3} 个 $X_k,\forall m\geqslant -3$.

$Q_{k-3}=Q_{k-4}\cdots Q_0X_kO_{k-3}$, 故 Q_{k-3} 中至少包含一个 X_k. 下设 $m\geqslant -2$, 且对 $Q_{k-3},\cdots,Q_{k+m-1}$ 断言已成立, 即它们分别包含 $2^0,2^1,\cdots,2^{m+2}$ 个 X_k. 因为 X_{k+m+3} 中至少包含一个 X_k, 故

$$Q_{k+m}=Q_{k+m-1}\cdots Q_{k-3}\cdots Q_0X_{k+m+3}O_{k+m}$$

中至少包含 $2^{m+2}+2^{m+1}+\cdots+2^0+1=2^{m+3}$ 个 X_k. 断言得证.

下面归纳证明, $A_1,A_2,\cdots$ 都对 X_k 关于 N_k 满足条件 W.

$L(A_1) = 2^k = N_k$, 且 $A_1 = P_0P_1\cdots P_{k-3}$ 的前 k 项的符号段为 X_k, 故 A_1 对 X_k 关于 N_k 满足条件 W.

下设 $m \geqslant 2, A_1, A_2, \cdots, A_m$ 已获证. 有

$$\frac{L(A_m)}{N_k} = \frac{L(P_{k+m-4})}{N_k} = \frac{2^{k+m-2}}{2^k} = 2^{m-2}.$$

又

$$A_m = P_{k+m-4} = Q_{k+m-5}O_{3\times 2^{k+m-5}+2}.$$

据上述断言, Q_{k+m-5} 至少包含 2^{m-2} 个 X_k, 因而 A_m 也如此. 据归纳假设和命题 5.3.2,

$$A_{m-1}A_{m-1} = P_{k+m-5}A_{m-1} = Q_{k+m-6}O_{3\times 2^{k+m-6}+2}A_{m-1} \tag{5.3.3}$$

对 X_k 关于 N_k 满足条件 W. 注意到

$$L(Q_{k+m-6}O_{3\times 2^{k+m-6}+2}) = L(P_{k+m-5}) = 2^{k+m-3},$$

且据上述断言, Q_{k+m-6} 中至少包含 $2^{m-3} = \dfrac{L(P_{k+m-5})}{N_k}$ 个 X_k, 显然在 (5.3.3) 中交换 $O_{3\times 2^{k+m-6}+2}$ 和 A_{m-1}, 即

$$Q_{k+m-6}A_{m-1}O_{3\times 2^{k+m-6}} \tag{5.3.4}$$

也对 X_k 关于 N_k 满足条件 W. 但

$$\begin{aligned}
&Q_{k+m-6}A_{m-1}O_{3\times 2^{k+m-6}+2} = Q_{k+m-6}P_{k+m-5}O_{3\times 2^{k+m-6}+2}\\
=&Q_{k+m-6}Q_{k+m-6}O_{3\times 2^{k+m-6}+2}O_{3\times 2^{k+m-6}+2}\\
=&Q_{k+m-6}Q_{k+m-7}\cdots Q_0X_{k+m-3}O_{k+m-6}O_{3\times 2^{k+m-5}+4},
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
A_m = P_{k+m-4} &= Q_{k+m-5}O_{3\times 2^{k+m-5}+2}\\
&= Q_{k+m-6}\cdots Q_0X_{k+m-2}O_{k+m-5}O_{3\times 2^{k+m-5}+2},
\end{aligned}$$

注意到两者长度相同且据上述断言, 易于计算 $Q_{k+m-6}\cdots Q_0X_{k+m-3}$ 和 $Q_{k+m-6}\cdots Q_0X_{k+m-2}$ 都至少包含 $\dfrac{L(A_m)}{N_k} = 2^{m-2}$ 个 X_k, 显然, 由前者, 即 (5.3.4) 对 X_k 关于 N_k 满足条件 W, 推论得后者, 即 A_m 也对 X_k 关于 N_k 满足条件 W. 归纳步骤完成.

据命题 5.3.3, $x = A_1A_2\cdots \in W(\sigma)$. 因为 $\omega(x,\sigma)$ 含不动点 $e = (00\cdots)$, 因而 $\omega(x,\sigma)$ 不是极小的, 从而 $x \notin A(\sigma)$, 即 $x \in W(\sigma) - A(\sigma)$. □

命题 5.3.5　设 $x = P_0P_1\cdots$ 如前所定义, 则 $A(\sigma|_{\omega(x,\sigma)}) = P(\sigma|_{\omega(x,\sigma)}) = \{(00\cdots)\}$.

证明　设结论不成立, 即存在 $e' = (e_0e_1\cdots) \in A(\sigma), e' \neq e = (00\cdots)$. 下面将导致矛盾.

因为 e' 是几乎周期点, 故 $\omega(e',\sigma)$ 是极小的, 因此 $x \notin \omega(e',\sigma), (00\cdots) \notin \omega(e',\sigma)$. 这蕴涵存在 $n > 0$, 使得 X_k和O_n 都不能出现在 e' 内, 因此也不能出现在 $(e_0e_1\cdots e_{m-1}) = E_m$ 内,$\forall m > n$. 因为 $e' \in \omega(x,\sigma)$, 故对任意的 $m \geqslant 0, E_m$ 可以出现在 x 内, 即存在 $l \geqslant 0$, 使得 $\sigma^l(x)$ 的前 m 项的符号段为 E_m. 对每一个 $m > 0$, 记 l_m 是满足这个条件的最小的整数, 并且这时我们说第一个 e_0 落在 $\sigma^{l_m}(x)$ 的第一个符号上, 即落在 x 的第 $l_m + 1$ 个符号上. 我们断言, 当 $m \to \infty$ 时, 亦有 $l_m \to \infty$. 这是因为, 若存在与 m 无关的 $l \geqslant 0$, 总有 $\sigma^l(x)$ 的前 m 项的符号段与 E_m 相等, 则易见 $\sigma^l(x) = e'$, 而这蕴涵 $x \in \omega(\sigma^l(x),\sigma) = \omega(e',\sigma)$, 与假设矛盾. 断言成立. 必要时用 $\sigma^l(x)$ 代替 $e', (l \geqslant 0)$, 可设 $e_0 = 1$. 又因为 e' 中出现无限多 1, 故又可假设 $e_{m-1} = 1$. 下面坚持这两个假设.

因为 $x = P_0P_1\cdots P_N\cdots = P_0Q_0O_5\cdots Q_{N-1}O_{3\times 2^{N-1}+2}\cdots$, 显然 e_0 和 e_{m-1} 只能出现在 P_0和Q_i 内, $i \geqslant 0$. 设 $m \geqslant n$ 充分大, 使第一个 e_0 不落在 P_0 内, 即落在 Q_i 内,$i \geqslant 0$.

存在 $N > 1$, 使得 $L(P_0\cdots P_{N-1}) = 2^{N+2} \leqslant l_m < L(P_0\cdots P_N) = 2^{N+3}$. 取 m 充分大, 可设 $N \geqslant n+2$. 这表明第一个 e_0 落在 $P_N = Q_{N-1}O_{3\times 2^{N-1}+2}$ 内, 即落在 Q_{N-1} 内. 如果 e_{m-1} 不落在 P_N 内, 显然 E_m 含 $O_{3\times 2^{N-1}+2}$, 因为 $N \geqslant n$, 故 $3 \times 2^{N-1}+2 \geqslant n$, 即 E_m 含 O_n, 与假设矛盾. 即 e_{m-1} 也落在 Q_{N-1} 内, 因而 E_m 出现在 Q_{N-1} 内. 因为 E_m 不能出现在 $P_0P_1\cdots P_{N-1} = P_0P_1\cdots P_{N-2}Q_{N-2}O_{3\times 2^{N-2}+2}$ 内, 故 E_m 也不能出现在 Q_{N-2} 内, 故 E_m 也不能出现在 $P_0P_1\cdots P_{N-1} = P_0P_1\cdots P_{N-2}$ $Q_{N-2}O_{3\times 2^{N-2}+2}$ 内. 据定义,

$$Q_{N-1} = Q_{N-2}\cdots Q_0X_{N+2}O_{N-1},$$

有下述三种情形:

(i) 设 E_m 可以出现在 $X_{N+2}O_{N-1}$ 内, 即可以出现在 X_{N+2} 内. 注意到 X_{N+2} 是 x 前 $N+2$ 项的符号段, 且 $N+2 \leqslant 2^{N+1} = L(P_{N-1})(N > 1)$, 这表明 E_m 可以出现在 $P_0P_1\cdots P_{N-1}$ 内, 与假设矛盾. 这证明 E_m 不能出现在 X_{N+2} 内.

(ii) 设 E_m 可以出现在 $Q_{N-2}\cdots Q_0$ 内. 据假设 E_m 不能出现在 Q_{N-2} 内, 故 e_{m-1} 落在 $Q_{N-3}\cdots Q_0$ 内. 若 e_0 也落在 $Q_{N-3}\cdots Q_0$ 内, 则 E_m 可以出现在 $Q_{N-2} = Q_{N-3}\cdots Q_0X_{N+1}O_{N-2}$ 内, 与假设矛盾. 因此, e_0 只能落在 Q_{N-2} 内, 即落在 $Q_{N-2}\cdots Q_0$ 内, e_0 落在 Q_{N-2} 内, 而 e_{m-1} 落在 $Q_{N-3}\cdots Q_0$ 内, 这明显蕴涵

E_m 含 Q_{N-2} 的子符号段 O_{N-2}. 但据假设 $N-2>n$, 因此 E_m 包含 O_n, 与假设矛盾. 以上证明 E_m 也不能出现在 $Q_{N-2}\cdots Q_0$ 内.

(iii) 由 (i) 和 (ii), E_m 只能出现在 $Q_{N-2}\cdots Q_0X_{N+2}$ 内, e_0 落在 $Q_{n-2}\cdots Q_0$ 内, e_{m-1} 落在 X_{N+2} 内, 因为 E_m 不能含 X_n, 故 E_m 出现在 $Q_{N-2}\cdots Q_0X_{n-1}$ 内. 设最小的 $0\leqslant M\leqslant N-2$, 使得 E_m 出现在 $Q_M\cdots Q_0X_{n-1}$ 内. 因为 $Q_M=Q_{M-1}\cdots Q_0X_{M+3}O_M$, 因此 E_m 含 O_M. 据假设这蕴涵 $M<n$, 即 E_m 出现在 $Q_{n-1}\cdots Q_0X_{n-1}$ 内. 因此 $m\geqslant L(Q_{n-1}\cdots Q_0X_{n-1})$. 注意到后者与 m 无关, 当 m 充分大时, 这个不等式不能成立. 这证明 (iii) 也不能发生.

综合 (i),(iii) 和 (iii), E_m 不能出现在 Q_{N-1} 内, 与假设矛盾. 这个矛盾由假设 $e'\in A(\sigma|_{\omega(x,\sigma)}), e'\neq(00\cdots)$ 引起, 因此这样的 e' 不存在. 证毕. □

设 $x=P_0P_1\cdots,\omega(x,\sigma)$ 如上, 考虑子系统

$$\sigma|_{\omega(x,\sigma)}:\omega(x,\sigma)\to\omega(x,\sigma).$$

我们证明了 $x\in W(\sigma|_{\omega(x,\sigma)})-A(\sigma|_{\omega(x,\sigma)}), A(\sigma|_{\omega(x,\sigma)})=(00\cdots)$, 因此

$$\overline{A(\sigma|_{\omega(x,\sigma)})}\subsetneqq M(A(\sigma|_{\omega(x,\sigma)})),$$

即运动中心真包含于测度中心, 弱几乎周期点不但可以不是几乎周期点, 而且可以不是几乎周期点的极限点.

例 5.3.3 存在紧致系统 (X,f), 使得 $W(f)\subsetneqq QW(f)$, 也就是拟弱几乎周期点可以不是弱几乎周期点.

设 $\sigma:\Sigma_2\to\Sigma_2$ 是两个符号 $\{0,1\}$ 的符号动力系统. Σ_2 上的度量取为

$$\rho(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x_n-y_n|}{2^n},\quad \forall x=(x_0x_1\cdots),y=(y_0y_1\cdots)\in\Sigma_2.$$

设 P 是 $\{0,1\}$ 上的有限序列, 其长度用 $|P|$ 表示. 构造 $x\in\Sigma_2$ 如下:

令 $P_{00}=(1,0)$. 对 $0<i\leqslant k$, 归纳假设 P_{k-1i-1} 已有定义, 令

$$P_{k0}=P_{k-1k-1}(\overbrace{00\cdots0}^{|P_{k-1k-1}|^2}),\quad P_{ki}=P_{ki-1}\overbrace{Q_iQ_i\cdots Q_i}^{|P_{ki-1}|^2},$$

而 Q_i 是 P_{ki-1} 前 i 项的符号段. 我们得到

$$P_{00}$$

$$P_{10}P_{11}$$

$$\cdots\cdots$$

$$P_{n0}P_{n1}\cdots P_{nn}$$

$$\cdots\cdots$$

令

$$x_n=(P_{nn}00\cdots)\in\Sigma_2,\quad \forall n\geqslant 0.$$

易见, 若 $0\leqslant k\leqslant n$, 则 P_{kk} 是 P_{nn} 的前 $|P_{kk}|$ 项的符号段. 这蕴涵存在 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\in\Sigma_2$.

考虑子系统

$$\sigma|_{\omega(x,\sigma)}:\omega(x,\sigma)\to\omega(x,\sigma).$$

从上述构造, 下述结论易于验证:

(1) x 的前 $|P_{ki}|$ 项的符号段与 P_{ki} 相等, $k=0,1,\cdots,0\leqslant i\leqslant k$;

(2) $|P_{k+1\ 0}|=|P_{kk}|+|P_{kk}|^2,|P_{ki}|=|P_{k\ i-1}|+i|P_{k\ i-1}|^2,k=0,1,\cdots,0\leqslant i\leqslant k$;

(3) 当 $j=|P_{kk}|,|P_{kk}|+1,\cdots|P_{k+1\ 0}|-1$ 时 (共 $|P_{kk}|^2$ 个), $\rho(x,\sigma^j(x))\geqslant 1$, 因为 x 与 $\sigma^j(x)$ 第一个坐标不同;

(4) 当 $j=|P_{k\ i-1}|,|P_{k\ i-1}|+i,|P_{k\ i-1}|+2i,\cdots,|P_{ki}|-i$ 时 (共 $|P_{ki-1}|^2$ 个),

$$\rho(x,\sigma^j(x))\leqslant\frac{1}{2^{i-1}},\quad 0<i\leqslant k,$$

因为 x 与 $\sigma^j(x)$ 的前 i 个坐标相等.

令 $\varepsilon_0=1$, 取 $n_k=|P_{k+1\ 0}|,k=0,1,\cdots$. 据上面的 (2),(3), 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1}\chi_{V(x,\varepsilon_0)}(\sigma^i(x))&=\frac{1}{|P_{k+1\ 0}|}\sharp(\{r|\sigma^r(x)\in V(x,\varepsilon_0),0\leqslant r<|P_{k+1\ 0}|\})\\&\leqslant\frac{|P_{k+1\ 0}|-|P_{kk}|^2}{|P_{k+1\ 0}|}=\frac{|P_{kk}|}{|P_{kk}|+|P_{kk}|^2}\to 0\quad(k\to\infty),\end{aligned}$$

因此, $\underline{P}_x(V(x,\varepsilon_0))=0$, 即 $x\notin W(\sigma|_{\omega(x,\sigma)})$.

设 $\varepsilon>0$. 取 $N>0$ 使 $\dfrac{1}{2^{N-2}}\leqslant\varepsilon$. 令 $n_k=|P_{kN}|,\forall k\geqslant N$. 据上述 (4), 有

$$\sharp\left(\left\{r|\sigma^r(x)\in V\left(x,\frac{1}{2^{N-2}}\right),0\leqslant r<|P_{kN}|\right\}\right)\geqslant|P_{kN-1}|^2.$$

因此, 据 (2),

$$\begin{aligned}\frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1}\chi_{V(x,\varepsilon)}(\sigma^i(x))&\geqslant\frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1}\chi_{V(x,\frac{1}{2^{N-2}})}(\sigma^i(x))\geqslant\frac{|P_{kN-1}|^2}{|P_{kN}|}\\&=\frac{|P_{kN-1}|^2}{|P_{kN-1}|+N|P_{kN-1}|^2}\to\frac{1}{N}>0\quad(k\to\infty).\end{aligned}$$

这证明 $\overline{P}_x(V(x,\varepsilon))>0$. 因此 $x\in QW(\sigma|_{\omega(x,\sigma)})$.

对子系统 $\sigma|_{\omega(x,\sigma)}:\omega(x,\sigma)\to\omega(x,\sigma)$, 即存在 $x\in QW(\sigma|_{\omega(x,\sigma)})-W(\sigma|_{\omega(x,\sigma)})$. 因为 $\overline{W(f)}=\overline{QW(f)}$, 故拟弱几乎周期点必是弱几乎周期点的极限点.

例 5.3.4　存在强拓扑混合的紧致系统 (X,f) 使得 $M(f)=\{x\}$ 即为单点集.

我们知道, 从纯拓扑角度, 强拓扑混合系统是最复杂的系统, 其复杂情况可以从下述描述中去理解. 在 X 中任取一点 x, 并任取它的一个邻域 $V(x,\varepsilon)$, 从强拓扑混合的定义中可以看出, $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}f^{-i}(V(x,\varepsilon))$ 是一个处处稠密的开集, 也就是说它与 X 的任意非空开集都相交不空. 从纯拓扑角度, 这当然是非常复杂的. 一个自然的问题是, 这样的系统其测度中心是否也很复杂? 本例说明情况并非如此. 我们的例子说明, 强拓扑混合的系统的测度中心可以非常简单. 顺便说明, 强拓扑混合系统可以有零拓扑熵, 这是很早就知道了的事实. 本例的结果是这个结果的加强, 因为单点的测度中心自然蕴涵有零拓扑熵. 这个例子说明, 纯拓扑方法在动力系统的复杂性研究中是不充分的, 而遍历理论方法可以加深人们对动力系统的认识.

设 Σ_2 是两个符号 $S=\{0,1\}$ 上的符号空间, 并取下面的一个拓扑度量:

$$\rho(x,y)=\max\left\{\frac{1}{n+1}|x_n\neq y_n,\forall n>0\right\},\quad \forall x,y\in\Sigma_2.$$

$$\begin{cases}\sigma:\Sigma_2\to\Sigma_2,\\ (x_0x_1\cdots)\mapsto(x_1x_2\cdots)\end{cases}\tag{5.3.5}$$

是其上转移自映射. 用 $(O(n))$ 表示全部由 0 组成、长度为 n 的符号段. 其他记号同前.

对任意的 $n>0$, 设 $P(n)$ 为待定的、长度为 n 的符号段. 考虑下面由符号段构成的无穷矩阵:

$$\begin{array}{ccc}P(1)O(1)P(1) & P(1)O(2)P(1) & P(1)O(3)P(1)\\ P(2)O(4)P(2) & P(2)O(5)P(2) & P(2)O(6)P(2)\\ & \cdots\cdots & \\ P(n)O(n^2)P(n) & P(n)O(n^2+1)P(n) & P(n)O(n^2+2)P(n)\\ & \cdots\cdots & \end{array}$$

按下面所示的顺序把上面无穷矩阵中的符号段分别记为 $Q_i,i>0$:

$$\begin{array}{l}Q_1\ \ Q_2\ \ Q_4\ \ Q_7\cdots\\ Q_3\ \ Q_5\ \ Q_8\cdots\end{array}$$

$$Q_6 \quad Q_9 \cdots$$

$$Q_{10} \cdots$$

$$\cdots\cdots$$

显然, 当对每个 $P(n)$ 陆续给出定义时, 每个 $Q(n)$ 也就完全确定了.

取 $A_1 = (1), P(1) = A_1$, 上面 Q_1 已确定. 令 $A_2 = A_1 O(|A_1|^2) Q_1$. 再取 $P(2)$ 为 A_2 的前 2 项的符号段 (显然 $|A_2| > 2$), 于是 Q_2 已确定. 令 $A_3 = A_2 O(|A_2|^2) Q_2$. 对 $n > 2$ 进行归纳, 假设 $A_{n-1}, P(n-1), Q_{n-1}$ 均已确定, 令 $A_n = A_{n-1} O(|A_{n-1}|^2) Q_{n-1}$. 取 $P(n)$ 为 A_n 的前 n 项的符号段 (易知 $|A_n| \geqslant n, \forall n > 1$), 而 Q_n 则由某个 $P(j), 1 \leqslant j \leqslant n$ 所确定.

从上述构造易知, A_{n-1} 即是 A_n 的前 $|A_{n-1}|$ 项的符号段, 故下述极限存在

$$x = \lim_{n \to \infty} (A_n 00 \cdots) \in \Sigma_2.$$

同时易见, x 是 σ 的非周期的回复点. 令 $\Lambda = \omega(x, \sigma)$, 即 x 的 ω 极限集. 考虑子转移

$$\sigma_\Lambda : \Lambda \to \Lambda.$$

设 B 是 $\{0,1\}$ 上的符号段, 并记 $r(B)$ 为 B 中坐标为 1 的个数. 容易验证下述结论成立:

(1) $A_n = (10 Q_1 O(|A_2|^2) Q_2 O(|A_3|^2) Q_3 \cdots O(|A_{n-1}|^2) Q_{n-1})$;

(2) $|A_n| \geqslant n^2, \forall n \geqslant 1$;

(3) $|A_n| > |A_{n-1}|^2, \forall n > 1$;

(4) $r(Q_n) \leqslant r(Q_{n-1}) + 2, \forall n > 0$.

引理 5.3.6 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} r(P(n)) = 0$.

证明 据上述 (4), 有

$$r(Q_n) \leqslant r(Q_{n-1}) + 2 \leqslant r(Q_{n-2}) + 4 \leqslant \cdots \leqslant r(Q_1) + 2(k-1) = 2k.$$

对充分大的 n, 存在 $i \geqslant 2$, 使得 $|A_i| \leqslant n < |A_{i+1}|$. 由于 $A_{i+1} = A_i O(|A_i|^2) Q_i$ 和 $P(n)$ 为 A_{i+1} 的前 n 项的符号段, 故有

$$r(P(n)) \leqslant r(A_{i+1}) = r(A_i) + r(Q_i).$$

又因为

$$A_i = A_{i-1} O(|A_{i-1}|^2) Q_{i-1}, \quad r(A_i) = r(A_{i-1}) + r(Q_{i-1}),$$

于是有

$$\frac{1}{n}r(P(n))\leqslant\frac{1}{n}[r(A_{i-1})+r(Q_{i-1})+r(Q_i)]\leqslant\frac{1}{n}(r(A_{i-1})+4i-2)$$
$$\leqslant\frac{1}{|A_i|}(|A_{i-1}|+4i-2).$$

当 $n\to\infty$, 亦有 $i\to\infty$, 据上述 (2) 和 (3), 易于看出, 上式右端趋于零, 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}r(P(n))=0.$$ □

引理 5.3.7 设 B 是首项和尾项坐标为 1、长度为 n 的符号段. 若 B 在 x 中出现, 则

$$\frac{1}{n}r(B)\leqslant\frac{2}{n}r(P(n)).$$

证明 首先, 若 B 就是 x 的前 n 项的符号段, 则 $\frac{1}{n}r(B)=\frac{1}{n}r(P(n))$. 若这种情况不发生, 注意到

$$x=(10Q_1O(|A_2|^2)Q_2O(|A_3|^2)Q_3\cdots O(|A_{n-1}|^2)Q_{n-1}\cdots),$$

则必定有 $1\leqslant i\leqslant j$, 使得 B 是首项落在 Q_i, 而尾项落在 Q_j 内的符号段. 下面设 i 是满足上述条件的最小正整数.

(1) 若 $i<j$, 即 B 在 $Q_i\cdots O(|A_j|^2)Q_j$ 中出现, 则 $n=|B|>|O(|A_j|^2)|=|A_j|^2$. 因此

$$A_j=(10Q_1O(|A_2|^2)Q_2O(|A_3|^2)Q_3\cdots O(|A_{j-1}|^2)Q_{j-1})$$

就是 $P(n)$ 的前 $|A_j|$ 项的符号段, 故

$$r(P(n))\geqslant 1+r(Q_1)+r(Q_2)+\cdots+r(Q_{j-1}).$$

另一方面, 由于 B 在 $Q_i\cdots O(|A_j|^2)Q_j$ 中出现, 故

$$\frac{1}{n}r(B)\leqslant\frac{1}{n}[r(Q_i)+\cdots+r(Q_{j-1})+r(Q_j)]$$
$$\leqslant\frac{1}{n}[r(Q_i)+\cdots+r(Q_{j-1})+r(Q_{j-1})+2]$$
$$\leqslant\frac{2}{n}[1+r(Q_1)+\cdots+r(Q_{j-1})]\leqslant\frac{2}{n}r(P(n)).$$

(2) 若 $i=j$, 即 B 在 $Q_i=P(m)O(l)P(m)$ 中出现, 由 Q_i 的定义知, $m\leqslant i$ 且 $m^2\leqslant l$(不妨设 $m<i$, 不然, 则 $i=1$, 结论显然成立). 这时又分以下两种情况:

① B 的首项落在前一个 $P(m)$ 内, 尾项落在后一个 $P(m)$ 内, 这时 $m\leqslant m^2\leqslant l<n$. 所以

$$\frac{1}{n}r(B)\leqslant\frac{2}{n}r(P(m))\leqslant\frac{2}{n}r(P(n)).$$

② B 在 $P(m)$ 中出现, 由于 $P(m)$ 即是 x 的前 m 项的符号段, 且 $m \leqslant i$, 故与 i 是最小这样的数相矛盾. 这种情形不发生. □

引理 5.3.8 上面构造的子转移的测度中心 $M(\sigma_\Lambda) = \{e\}$, 其中 $e = (00\cdots) \in \Sigma_2$ 是 σ 的不动点.

证明 设 $y = (y_0y_1\cdots) \in \Lambda$ 是 σ_Λ 的一个回复点, 且 $y \neq e$.

若 $y_0 = 1$, 由于 y 是一个回复点, 故 y 的坐标中有无穷多个 1, 即存在严格递增的正整数序列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使得 $y_{n_i} = 1, \forall i > 0$. 因为 $y \in \Lambda = \omega(x, \sigma_\Lambda)$, 故 $\forall i > 0$, 存在 $l > 0$, 使得 $\sigma_\Lambda^l(x)$ 的前 $n_i + 1$ 项的符号段恰为 $(y_0y_1\cdots y_{n_i})$, 即 $(y_0y_1\cdots y_{n_i})$ 在 x 中出现, 且它的首项和尾项均为 1. 据引理 5.3.7, 有

$$\frac{1}{n_i+1}r(y_0y_1\cdots y_{n_i}) \leqslant \frac{2}{n_i+1}r(P(n_i+1)).$$

取 $\varepsilon_0 = 1$, 则

$$\begin{aligned}
\underline{P}_x(V(y,\varepsilon_0)) &= \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\chi_{V(y,\varepsilon_0)}(\sigma_\Lambda^j(y)) \\
&= \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sharp(\{j|\sigma_\Lambda^j(y) \in V(y,\varepsilon_0), 0 \leqslant j < n\}) \\
&\leqslant \liminf_{i\to\infty}\frac{1}{n_i+1}\sharp(\{j|\sigma_\Lambda^j(y) \in V(y,\varepsilon_0), 0 \leqslant j < n_i\}) \\
&= \liminf_{i\to\infty}\frac{1}{n_i+1}r(y_0y_1\cdots y_{n_i}) \\
&\leqslant \liminf_{i\to\infty}\frac{2}{n_i+1}r(P(n_i+1)) = 0.
\end{aligned}$$

因此, $y \notin QW(\sigma_\Lambda)$.

若 $y_0 = 0$, 由于 $y \neq e$, 故存在某个 $k > 0$, 使得 $\sigma_\Lambda^k(y)$ 的首项坐标为 1. 重复上面的证明可得 $\sigma_\Lambda^k(y) \notin W(\sigma_\Lambda)$. 据弱几乎周期点的不变性可知, $y \notin W(\sigma_\Lambda)$. 这样就证明了 $W(\sigma_\Lambda) = \{e\}$, 从而

$$M(\sigma_\Lambda) = \overline{W(\sigma_\Lambda)} = \{e\}. \qquad \square$$

命题 5.3.9 设 (X, f) 是拓扑传递的, 即存在 $x \in X$, 使 $\omega(x, f) = X$, 则 f 是拓扑强混合的当且仅当对 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n \geqslant N$ 时, 均有 $f^n(V(x,\varepsilon)) \cap V(x,\varepsilon) \neq \varnothing$.

证明 必要性是显然的. 下面证明充分性.

设 $U, V \subset X$ 为任意非空开集, 由 f 的连续性及 $X = \omega(x, f)$, 存在整数 $k, l > 0$ 和实数 $\varepsilon > 0$, 使得 $f^k(V(x,\varepsilon)) \subset U, f^l(V(x,\varepsilon)) \subset V$. 取充分大的 $N > 0$, 使得 $N > k, N > l$ 并且满足: 当 $n > N$ 时, 恒有

$$f^n(V(x,\varepsilon)) \cap V(x,\varepsilon) \neq \varnothing.$$

因此

$$\varnothing \neq f^l(f^n(V(x,\varepsilon)) \cap V(x,\varepsilon)) \subset f^{n+l}(V(x,\varepsilon)) \cap f^l(V(x,\varepsilon))$$
$$= f^{n+l-k}(f^k(V(x,\varepsilon))) \cap f^l(V(x,\varepsilon)) \subset f^{n+l-k}(U) \cap V.$$

注意到上面式子对所有的 $n \geqslant N$ 成立, 即对所有的 $m \geqslant N+l-k$, 都有 $f^m(U) \cap V \neq \varnothing$, 从而 f 是拓扑强混合的. □

命题 5.3.10 上面构造的例子

$$\sigma_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$$

拓扑强混合的.

证明 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在整数 $N > 0$ 满足: 对任意的 $x, y \in \Sigma_2$, 如果它们的前 N 项的符号段的坐标对应相等, 则它们之间的距离就小于 ε.

从 x 的构造可以看出, x 的轨道上存在下列形状的点:

$$(P(N)O(N^2+i)P(N)\cdots) \in \mathrm{orb}(x), \quad \forall i \geqslant 0,$$

并且

$$(P(N)O(N^2+i)P(N)\cdots) \in V(x,\varepsilon), \quad \forall i \geqslant 0.$$

这是因为 $P(N)$ 正好是 x 的前 N 项的符号段.

另一方面, 对任意的 $i \geqslant 0$, 有

$$\sigma_\Lambda^{N+N^2+i}(P(N)O(N^2+i)P(N)\cdots) = (P(N)\cdots) \in V(x,\varepsilon),$$

即当 $n \geqslant N+N^2$ 时, 恒有

$$\sigma_\Lambda^n(V(x,\varepsilon)) \cap V(x,\varepsilon) \neq \varnothing.$$

据命题 5.3.9, σ_Λ 是拓扑强混合的. □

第 6 章　轨道的层次, 混沌的层次

前面我们说过, 动力系统的核心问题是点的轨道的渐近性质或拓扑结构. 这样说的意思是, 动力系统问题五花八门, 当讨论某个问题遇到困难时, 追本溯源, 问题的困难症结往往都出在点的轨道结构上, 因此进一步分析点的轨道结构是一件非常重要的问题. 遍历理论方法的引入, 为我们提供了开展这项工作的基础.

6.1　点的轨道的三个层次

设 (X,f) 为紧致系统, $x\in X$. 我们已经证明 $C_x\subset\omega(x,f), S_m\subset C_x, \forall m\in M_x$. 也就是

$$S_m\subset C_x\subset\omega(x,f),\quad \forall m\in M_x.$$

这就是点的轨道的三个层次, 当点处于不同的回复层次时, 这三个层次之间可能有不同的关系, 因此我们要对它们进一步加以分析.

下面设 $x\in R(f)$. 上一章证明了

$$\begin{aligned} x\in W(f)&\Leftrightarrow \underline{P}_x(V(x,\varepsilon))>0,\quad \forall\varepsilon>0\\ &\Leftrightarrow x\in S_m=C_x,\quad \forall m\in M_x\\ &\Leftrightarrow \omega(x,f)=S_m,\quad \forall m\in M_x\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} x\in QW(f)&\Leftrightarrow \overline{P}_x(V(x,\varepsilon))>0,\quad \forall\varepsilon>0\\ &\Leftrightarrow x\in C_x\Leftrightarrow \omega(x,f)=\overline{\bigcup_{m\in M_x} S_m}\\ &\Leftrightarrow C_x=\omega(x,f).\end{aligned}$$

这两个结果把一个点、沿该点的轨道生成的不变测度的支撑、该点的极小吸引中心和该点的 ω 极限集联系起来, 引申出一系列问题, 对这些问题的讨论就会把我们对点的轨道结构的认识引向深入. 例如, 从上述两个结果, 可以看出, 点的轨道的三个层次与该点的回复性有下述关系:

$$x\in R(f)-QW(f)\Rightarrow x\notin C_x \text{ 和 } C_x\neq\omega(x,f);\tag{6.1.1}$$

$$x\in QW(f)-W(f)\Rightarrow \text{ 存在 } m\in M_x,\text{ 使 } S_m\neq C_x=\omega(x,f);\tag{6.1.2}$$

且 M_x 不是单点集.

$$x \in W(f) \Rightarrow x \in S_m, \forall m \in M_x, \tag{6.1.3}$$

且 M_x 可以是单点集也可以不是.

从这里可以看出弱和拟弱几乎周期点有不同的遍历内涵. 正如前一章所证明的, 弱几乎周期点集是全概率集合, 而全概率集合当然越 "小" 越好, 因此本来无需再引进更 "大" 的拟弱几乎周期点集, 而基于上述理由, 引进拟弱几乎周期点集是于讨论点的轨道结构是有益的, 特别是, 拟弱几乎周期点是一个点属于它自己的极小吸引中心的充要条件.

如上所述, 当 $x \in QW(f) \Leftrightarrow C_x = \overline{\bigcup_{m \in M_x} S_m}$ 且 M_x 不是单点集. 在文献 [104] 中我们提出一个开问题, 即是否存在紧致系统 (X, f) 使得存在

$$m \in M_x, \quad S_m = C_x?$$

下面构造两个例子说明 (这两个例子由何伟弘提供), 两种情况都是可能的, 即存在紧致系统 (X, f) 和点 $x \in QW(f)$ 使得

$$\exists m \in M_x, \quad S_m = C_x;$$

同样存在紧致系统 (X, f) 和点 $x \in QW(f)$, 使得

$$S_m \neq C_x, \quad \forall m \in M_x.$$

例 6.1.1 存在紧致系统 (X, f) 和 $x \in QW(f)$, 使得

$$\exists m \in M_x, \quad S_m = C_x.$$

设 $\sigma: \Sigma_2 \to \Sigma_2$ 是两个符号 $S = \{0, 1\}$ 上的转移自映射, 并取度量

$$\rho(x, y) = 2^{-\min\{n \in \mathbb{Z}^+ | x_n \neq y_n\}}, \quad \forall x = (x_0 x_1 \cdots), y = (y_0 y_1 \cdots) \in \Sigma_2.$$

下面用符号动力系统构造 $x \in QW(f) - W(f)$.

令

$$A_1 = (01), \quad A_2 = A_1 \overbrace{(0, 0, \cdots, 0)}^{|A_1|^2} \overbrace{(A_1, A_1, \cdots, A_1)}^{m_{11}},$$

A_2 由 A_1 和 $|A_1|^2$ 个 0, 及 m_{11} 个 A_1 连接而成, 其中

$$m_{11} = |A_1 \overbrace{(0, 0, \cdots, 0)}^{|A_1|^2}|^2$$

为它前面那个符号段的长度的平方;

$$A_3 = A_2\overbrace{(00\cdots 0)}^{|A_2|^2}\overbrace{(A_1\cdots A_1)}^{m_{21}}\overbrace{(A_2\cdots A_2)}^{m_{22}},$$

其中取 $m_{21}\geqslant |A_2\overbrace{(00\cdots)}^{|A_2|^2}|^2$ 充分大, 易见 A_1 在 $A_2\overbrace{(00\cdots)}^{|A_2|^2}\overbrace{(A_1\cdots A_1)}^{m_{21}}$ 中出现的频率不低于 A_1 在 A_2 中出现的频率. 令 $m_{22}=|A_2\overbrace{(00\cdots 0)}^{|A_2|^2}\overbrace{(A_1\cdots A_1)}^{m_{21}}|^2$;

归纳地, 设当 k 已有定义. 令

$$A_{k+1} = A_k\overbrace{(00\cdots 0)}^{|A_k|^2}\overbrace{(A_1\cdots A_1)}^{m_{k1}}\overbrace{(A_2\cdots A_2)}^{m_{k2}}\cdots\overbrace{(A_k\cdots A_k)}^{m_{kk}},$$

其中取

$$m_{k1}\geqslant |A_k\overbrace{(00\cdots 0)}^{|A_k|^2}|^2;$$

$$m_{ki}\geqslant |A_k\overbrace{(00\cdots 0)}^{|A_k|^2}\overbrace{(A_1\cdots A_1)}^{m_{k1}}\cdots\overbrace{(A_{i-1}\cdots A_{i-1})}^{m_{ki-1}}|^2,\quad i=2,\cdots,k-1,$$

并对每个 $i=1,2,\cdots,k-1$, 取 m_{ki} 充分大, 使得 A_i 在

$$A_k\overbrace{(00\cdots 0)}^{|A_k|^2}\overbrace{(A_1\cdots A_1)}^{k_{k1}}\cdots\overbrace{(A_i\cdots A_i)}^{m_{ki}}$$

中出现的频率不低于 A_i 在 A_{i+1} 中出现的频率. 取

$$m_{kk} = |A_k\overbrace{(00\cdots 0)}^{|A_k|^2}\overbrace{(A_1\cdots A_1)}^{m_{k1}}\cdots\overbrace{(A_{k-1}\cdots A_{k-1})}^{m_{kk-1}}|^2.$$

归纳步骤完成, 得到 $A_1, A_2,\cdots$.

令 $x=\lim\limits_{k\to\infty}(A_k 00\cdots)\in\Sigma_2$.

命题 6.1.1 (1) $x\in R(\sigma)$;

(2) $(00\cdots),(A_1A_1\cdots),\cdots,(A_kA_k\cdots)\in\omega(x,\sigma)$;

(3) $\forall 1\leqslant i\leqslant k$, $\dfrac{|A_{i+1}|_{A_i}}{|A_{i+1}|}\leqslant\dfrac{|A_{k+1}|_{A_i}}{|A_{k+1}|}$, 其中 $|A_{i+1}|_{A_i}$ 表示符号段 A_i 在符号段 A_{i+1} 中出现的次数;

(4) $x\in QW(\sigma)-W(\sigma)$.

证明 从 x 的构造易见, (1) 和 (2) 是明显的. 下面证明 (3).

当 $k=1$ 时, 结论显然成立. 假设 $\dfrac{|A_{i+1}|_{A_i}}{|A_{i+1}|} \leqslant \dfrac{|A_j|_{A_i}}{|A_j|}$ 对 $i<j\leqslant k$ 已成立.

由上述 m_{ki} 的选取可知

$$\frac{|A_k\overbrace{(00\cdots 0)}^{|A_k|^2}\overbrace{(A_1\cdots A_1)}^{m_{k1}}\cdots\overbrace{(A_i\cdots A_i)}^{m_{ki}}|_{A_i}}{|A_k\underbrace{(00\cdots 0)}_{|A_k|^2}\underbrace{(A_1\cdots A_1)}_{m_{k1}}\cdots\underbrace{(A_i\cdots A_i)}_{m_{ki}}|}\geqslant\frac{|A_{i+1}|_{A_i}}{|A_{i+1}|},$$

并且由于

$$\frac{|\overbrace{A_{i+1}\cdots A_{i+1}}^{m_{ki+1}}|_{A_i}}{|\overbrace{A_{i+1}\cdots A_{i+1}}^{m_{ki+1}}|}\geqslant\frac{|A_{i+1}|_{A_i}}{|A_{i+1}|},\cdots,\frac{|\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{kk}}|_{A_i}}{|\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{kk}}|}\geqslant\frac{|A_{i+1}|_{A_i}}{|A_{i+1}|},$$

即 A_i 在下列符号段

$$A_k\overbrace{(00\cdots 0)}^{|A_k|^2}\overbrace{A_1\cdots A_1}^{m_{k1}}\cdots\overbrace{A_i\cdots A_i}^{m_{ki}},\cdots,\overbrace{A_{i+1}\cdots A_{i+1}}^{m_{ki+1}},\cdots,\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{kk}}$$

中出现的频率都不低于 $\dfrac{|A_{i+1}|_{A_i}}{|A_{i+1}|}$. 把这些符号段连接起来, 得

$$\frac{|A_{k+1}|^2_{A_i}}{|A_{k+1}|}=\frac{|A_k\overbrace{(00\cdots 0)}^{|A_k|^2}\overbrace{A_1\cdots A_1}^{m_{k1}}\cdots\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{kk}}|_{A_i}}{|A_k\underbrace{(00\cdots 0)}_{|A_k|^2}\underbrace{A_1\cdots A_1}_{m_{k1}}\cdots\underbrace{A_k\cdots A_k}_{m_{kk}}|}\geqslant\frac{|A_{i+1}|_{A_i}}{|A_{i+1}|}.$$

(4) 的证明. 设 V 是 x 的任意一个邻域, 则存在正整数 k, 使得如果点 $y\in\Sigma_2$ 是以符号段 A_k 开始的, 必有 $y\in V$. 注意到

$$x=(A_1\cdots\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{k+1k}}\cdots\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{k+2k}}\cdots),$$

取正整数序列:

$$n_i=|A_1\cdots\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{kk}}\cdots\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{k+1k}}\cdots\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{k+2k}}\cdots\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{k+ik}}|,\quad i=1,2,\cdots.$$

由于符号段 A_k 在符号段 $A_1\cdots\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{kk}}\cdots\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{k+1k}}\cdots\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{k+2k}}\cdots\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{k+ik}}$ 出现的次数不少于 m_{k+ik}, 故

$$\#(N(x,V)\cap\{1,2,\cdots,n_i\})\geqslant m_{k+ik}.$$

比较符号段 $A_1\cdots\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{kk}}\cdots\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{k+1k}}\cdots\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{k+2k}}\cdots\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{k+ik}}$ 中位于符号段 $\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{k+ik}}$ 之前的那一段符号段与 $\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{k+ik}}$, 我们知道后者的长度远大于前者的长度 (后者的长度超过前者长度的平方倍), 因此

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\frac{\sharp(N(x,V)\cap\{1,2,\cdots n\})}{n}&\geqslant\limsup_{i\to\infty}\frac{\sharp(N(x,V)\cap\{1,2,\cdots,n_i\})}{n_i}\\&\geqslant\frac{m_{k+ik}}{2|\overbrace{A_k\cdots A_k}^{m_{k+ik}}|}=\frac{1}{2|A_k|}>0,\end{aligned}$$

故 $x\in QW(\sigma)$.

另一方面, 注意到

$$x=(A_1\overbrace{00\cdots0}^{|A_1|^2}\cdots\overbrace{00\cdots0}^{|A_2|^2}\cdots\overbrace{00\cdots0}^{|A_3|^2}\cdots)=(A_i\overbrace{00\cdots0}^{|A_i|^2}),$$

取正整数序列:

$$l_i=|A_i\overbrace{00\cdots0}^{|A_i|^2}|,\quad i=1,2,\cdots.$$

设 $V_0=V\left(x,\dfrac{1}{3}\right)$ 为 x 的 $\dfrac{1}{3}$ 邻域. 对 $j=|A_i|,\cdots,l_i-1,\rho(x,\sigma^j(x))=\dfrac{1}{2}$ (它们的第一个符号就不同), 因此有 $\sharp(N(x,V_0)\cap\{1,2,\cdots,l_i\})\leqslant|A_i|$,

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\frac{\sharp(N(x,V_0)\cap\{1,2,\cdots,n\})}{n}&\leqslant\liminf_{i\to\infty}\frac{\sharp(N(x,V_0)\cap\{1,2,\cdots,l_i\})}{l_i}\\&=\lim_{i\to\infty}\frac{|A_i|}{|A_i|+|A_i|^2}=0,\end{aligned}$$

故 $x\notin W(\sigma)$. □

对上面构造的 x, 有

命题 6.1.2　*存在 $m\in M_x$, 使得 $S_m=C_x$.*

证明　由于 $x\in QW(\sigma)$, 故 $C_x=\omega(x,\sigma)$. 又因为 $S_m\subset\omega(x,\sigma)$, 因此只需证明存在 $m\in M_x$, 使得 $x\in S_m$.

对 $i=1,2,\cdots$, 令 $n_i=|A_i|$. 必要时取子序列, 不妨设 $m=\dfrac{1}{n_i}\displaystyle\sum_{j=0}^{n_i-1}\delta_{\sigma^j(x)}$. 对 x 的任意邻域 V, 存在开集 U 使得 $x\in U\subset\overline{U}\subset V$. 取充分大的整数 $k>0$, 满足: 如果 $y\in\Sigma_2$ 是以符号段 A_k 开始的, 则必有 $y\in U$. 这又意味着如果符号段 A_k 在 x 的位置 l 中出现, 则有 $\sigma^{l-1}(x)\in U$. 于是

$$m(V)\geqslant m(\overline{U})\geqslant\lim_{i\to\infty}\frac{1}{n_i}\sum_{j=0}^{n_i-1}\delta_{\sigma^j(x)}(\overline{U})\geqslant\lim_{i\to\infty}\frac{|A_i|_{A_k}}{|A_i|}\geqslant\frac{|A_{k+1}|_{A_k}}{|A_{k+1}|}>0.$$

因此 $x \in S_m$. □

例 6.1.2 存在紧致系统 (X,f), 使得存在点 $x \in QW(f), S_m \neq C_x, \forall m \in M_x$.

先引进一些记号. 设 A, B 是 $S=\{0,1\}$ 上的符号段. 用 $A\overbrace{BB\cdots B}^{(sq)}$ 表示一个 A 和 $|A|^2$ 个 B 构成的符号段, 其中 (sq) 是指符号段 B 重复的次数是符号段 A 的长度的平方倍. 又如

$$A\overbrace{BB\cdots B}^{(sq)}\overbrace{CC\cdots C}^{2(sq)} = A\overbrace{BB\cdots B}^{|A|^2}\ \ \overbrace{CC\cdots C}^{2(|A|+|A|^2\times|B|)^2}$$

其中第二个花括号上的 $2(sq)$ 表示符号段被重复的次数是它前面一整段符号段 $A\overbrace{BB\cdots B}^{(sq)}$ 的长度平方的 2 倍, 即 $2(|A|+|A|^2\times|B|)^2$. 另外, 符号段 $A\overbrace{BB\cdots B}^{(sq)}$ $\overbrace{CC\cdots C}^{(bl)}$ 中的 (bl) 则表示符号段 C 重复的次数等于紧靠它之前的花括号所框住的那段符号段 $\overbrace{BB\cdots B}$ 的长度, 即

$$A\overbrace{BB\cdots B}^{(sq)}\overbrace{CC\cdots C}^{(bl)} = A\overbrace{BB\cdots B}^{|A|^2}\overbrace{CC\cdots C}^{|A|^2\times|B|}.$$

下面构造我们所需的例子.

令 $D_1=1, B_1=101, D_2=10$(B_1的前面两位字符所组成的符号段),

$$B_2 = B_1\overbrace{00\cdots 0}^{(sq)}\overbrace{D_1D_1\cdots D_1}^{bl}\overbrace{00\cdots 0}^{2^2(sq)}\overbrace{D_2D_2\cdots D_2}^{\frac{(bl)}{2^2}}.$$

令 D_3 是 B_2 的前三位组成的符号段.

设 $D_{i+1}, B_i, i \leqslant k-1$ 已定义, 归纳地, 令

$$B_k = B_{k-1}\overbrace{00\cdots 0}^{(sq)}\overbrace{D_1D_1\cdots D_1}^{(bl)}\overbrace{00\cdots 0}^{2^2(sq)}\overbrace{D_2D_2\cdots D_2}^{\frac{(bl)}{2^2}}\cdots\overbrace{00\cdots 0}^{k^2(sq)}\overbrace{D_kD_k\cdots D_k}^{\frac{(bl)}{k^2}}$$

和 D_{k+1} 是 B_k 的前 $k+1$ 位字符构成的符号段.

令 $z = \lim\limits_{k\to\infty}(B_k00\cdots) \in \Sigma_2$.

命题 6.1.3 设 z 如上, 则

(1) $z \in R(\sigma)$;

(2) 周期点 $(00\cdots), (D_1D_1\cdots), \cdots, (D_kD_k\cdots), \cdots \in \omega(z,\sigma)$;

(3) $Z \in QW(\sigma) - W(\sigma)$.

证明 (1), (2) 是明显的. 下面证明 (3).

设 V 是 z 的任意邻域. 存在整数 $k>0$ 满足: 如果 $y\in\Sigma_2$ 是以符号段 D_k 开始, 则有 $y\in V$. 对于 $i=k,k+1,\cdots,B_i$ 具有下面形式:

$$B_i=B_{i-1}\overbrace{00\cdots0}^{(sq)}\overbrace{D_1D_1\cdots D_1}^{(bl)}\cdots\overbrace{00\cdots0}^{k^2(sq)}\overbrace{D_kD_k\cdots D_k}^{\frac{(bl)}{k^2}}\cdots\overbrace{00\cdots0}^{i^2(sq)}\overbrace{D_iD_i\cdots D_i}^{\frac{(bl)}{i^2}},$$

令 $m_i=|B_{i-1}\overbrace{00\cdots0}^{(sq)}|,n_i=|B_{i-1}\overbrace{00\cdots0}^{(sq)}\overbrace{D_1D_1\cdots D_1}^{(bl)}\cdots\overbrace{00\cdots0}^{k^2(sq)}\overbrace{D_k\cdots D_k}^{\frac{(bl)}{k^2}}|$. 考察在 B_i 中前面的两段符号段:

$$B_{i-1}\overbrace{00\cdots0}^{(sq)}\overbrace{D_1D_1\cdots D_1}^{(bl)}\cdots\overbrace{00\cdots0}^{(k-1)^2(sq)}\overbrace{D_{k-1}D_{k-1}\cdots D_{k-1}}^{\frac{(bl)}{(k-1)^2}},$$

和

$$\overbrace{00\cdots0}^{k^2(sq)}\overbrace{D_kD_k\cdots D_k}^{\frac{(bl)}{k^2}},$$

后者的长度比前者的长度要长得多, 因此当要计算符号段 D_k 出现的频率时, 我们更关心后者. 且对于后者 $\overbrace{00\cdots0}^{k^2(sq)}\overbrace{D_kD_k\cdots D_k}^{\frac{(bl)}{k^2}}$, 假设 $(sq)=l$, 则根据约定 $\dfrac{(bl)}{k^2}=l$, 也就是说 D_k 在这一段中出现至少 l 次, 于是当 j 从零变动到 n_i-1 时, $\sigma^j(z)$ 至少 l 次进入到 V 内, 而这段符号段的长度为 $k^2\times l+k\times l$, 易知 $2(k^2\times l+k\times l)\geqslant n_i$, 故有

$$\frac{\sharp(N(z,V)\cap\{1,2,\cdots,n_i\})}{n_i}\geqslant\frac{l}{2(k^2l+k\times l)}=\frac{1}{2(k^2+k)},$$

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\frac{\sharp(N(z,V)\cap\{1,2,\cdots,n\})}{n}&\geqslant\limsup_{i\to\infty}\frac{\sharp(N(z,V)\cap\{1,2,\cdots,n_i\})}{n_i}\\&\geqslant\frac{1}{2(k^2+k)}>0,\end{aligned}$$

因此 $z\in QW(\sigma)$.

另一方面, 取 $V_0=V\left(z,\dfrac{1}{3}\right)$ 为 z 的 $\dfrac{1}{3}$ 邻域. 当 $j=|B_{i-1}|,\cdots,m_i-1$ 时, 有 $\sigma^j(z)\notin V_0$, 因此

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\frac{\sharp(N(z,V_0)\cap\{1,2,\cdots,n\})}{n}&\leqslant\liminf_{i\to\infty}\frac{\sharp(N(z,V_0)\cap\{1,2,\cdots,m_i\})}{m_i}\\&\leqslant\lim_{i\to\infty}\frac{|B_{i-1}|}{|B_{i-1}|+|B_{i-1}|^2}=0,\end{aligned}$$

故 $z \notin W(\sigma)$. □

设 $n \in \mathbb{Z}^+, A, B, C$ 是三个符号段, 称整数 n 对于符号段 ABC(或符号序列 $ABC\cdots$) 终止于 B, 如果 $|A| < n \leqslant |A| + |B|$, 当后面的等号成立时, 称 n 终止于 B 末.

命题 6.1.4 设 $V = V\left(z, \frac{1}{2}\right)$ 是 z 的 $\frac{1}{2}$ 邻域, 考虑到 z 可以写成

$$z = (1\cdots\overbrace{D_k D_k \cdots D_k}\overbrace{00\cdots 0}), \tag{6.1.4}$$

如果整数 r 对 z 终止于上述符号段 $\overbrace{00\cdots 0}$, 而 s 对 z 终止于 $\overbrace{D_k D_k \cdots D_k}$ 末, 即 $s = |1\cdots\overbrace{D_k D_k \cdots D_k}|$ 则

$$\frac{1}{r}\sum_{j=0}^{r-1}\delta_{\sigma^j(z)}(V) \leqslant \frac{1}{s}\sum_{j=0}^{s-1}\delta_{\sigma^j(z)}(V).$$

证明 因为当 $j = s, s+1, \cdots, r-1$ 时, 有 $\delta_{\sigma^j(z)}(V) = 0$, 结论显然成立. □

命题 6.1.5 对每个 $m \in M_z$, 都有 $z \notin S_m$.

证明 设正整数序列 $\{n_i\}$ 满足 $m = \lim\limits_{i\to\infty}\frac{1}{n_i}\sum\limits_{j=0}^{n_i-1}\delta_{\sigma^j(z)}$. 为了证明命题的结论, 我们来找出 z 的一个邻域 V 使之满足 $m(V) = 0$, 而根据引理 4.1.14, 只需证明

$$\liminf_{i\to\infty}\frac{1}{n_i}\sum_{j=0}^{n_i-1}\delta_{\sigma^j(z)}(V) = 0.$$

根据命题 6.1.4, 不妨设每个 n_i 都对 z 终止于某段 $\overbrace{D_k D_k \cdots D_k}$, 因为这时 $\frac{1}{n_i}\sum\limits_{j=0}^{n_i-1}\delta_{\sigma^j(z)}(V)$ 的值要比 n_i 终止于 $\overbrace{00\cdots 0}$ 符号段大.

情形 1. 序列 $\{k_i\}$ 无界.

不失一般性, 设 $k_i \to \infty (i \to \infty)$. 如上述 n_i 对 z 终止于符号段 $\overbrace{D_{k_i} D_{k_i} \cdots D_{k_i}}$,

$$z = (1\cdots\overbrace{00\cdots 0}^{k_i^2(sq)}\overbrace{D_{k_i} D_{k_i}\cdots D_{k_i}}^{\frac{(bl)}{k_i^2}}\cdots),$$

这里的 $(sq) = l_i$, 则 $(bl) = k_i^2 \times l_i$, 由于 n_i 终止于 $\overbrace{D_{k_i} D_{k_i} \cdots D_{k_i}}$, 因此有

$$k_i^2 \times l_i < n_i \leqslant \sqrt{l_i} + k_i^2 \times l_i + k_i \times l_i < l_i + k_i^2 \times l_i + k_i \times l_i.$$

令 $V\left(z, \frac{1}{3}\right)$ 为 z 的 $\frac{1}{3}$ 邻域, 当

$$j=\sqrt{l_i},\sqrt{l_i}+1,\cdots,\sqrt{l_i}+k_i^2\times l_i-1$$

时, $\sigma^j(z)$ 的第一个符号是零, 故 $\sigma^j(z)\in V$, 因此

$$\frac{1}{n_i}\sum_{j=0}^{n_i-1}\delta_{\sigma^j(z)}(V)\leqslant\frac{n_i-k^2\times l_i}{n_i}<\frac{l_i+k_i\times l_i}{k_i^2\times l_i}=\frac{1+k_i}{k_i^2}\to 0\quad(i\to\infty).$$

因此

$$\liminf_{i\to\infty}\frac{1}{n_i}\sum_{j=0}^{n_i-1}\delta_{\sigma^j(z)}(V)=0.$$

情形 2. 序列 $\{n_i\}$ 有界.

不失一般性, 设每个 $k_i=k$. n_i 对 z 终止于下面片段 $\overbrace{D_kD_k\cdots D_k}^{l_i}$,

$$z=(1\cdots\overbrace{00\cdots0}^{k^2(sq)}\overbrace{D_kD_k\cdots D_k}^{\frac{(bl)}{k^2}}\cdots),\tag{6.1.5}$$

设这里的 $(sq)=l_i$, 则 $(bl)=k^2\times l_i$, n_i 对 z 终止于 $\overbrace{D_kD_k\cdots D_k}^{l_i}$. 因为 $z\in QW(\sigma)-W(\sigma)$, 故 $z\notin P(\sigma)$, 比较 z 和周期点 $w=(D_kD_k\cdots),\sigma(w),\cdots,\sigma^{k-1}(w)$, 我们可以找到整数 $s>k$, 使得 z 和每个 $\sigma^\tau(w)(\tau=0,1,\cdots,k-1)$ 的前 s 项的符号段不完全一致.

取 $V=V(z,2^{-s})$ 为 z 的 2^{-s} 邻域, 注意到 $\sqrt{l_i}+k^2\times l_i$ 对 z 终止于 $\overbrace{00\cdots0}$ 末 (见 (6.1.5)), 因此当 j 从 $\sqrt{l_i}+k^2\times l_i$ 变动到 $\sqrt{l_i}+k^2\times l_i+k\times l_i-s-1$ 时, 都有某个 $\sigma^\tau(w)(\tau=0,1,\cdots,k-1)$ 使得 $\sigma^\tau(w)$ 和 $\sigma^j(z)$ 的前 s 项的符号段完全相同, 故 $\sigma^j(z)\notin V$.

另外, 当 $j=\sqrt{l_i},\sqrt{l_i}+1,\cdots,\sqrt{l_i}+k^2\times l_i-1$ 时, 有 $\sigma^j(z)\notin V$ (因为 $\sigma^j(z)$ 以 0 开始), 因此

$$\frac{1}{n_i}\sum_{j=0}^{n_i-1}\delta_{\sigma^j(z)}(V)\leqslant\frac{\sqrt{l_i}+s}{n_i}<\frac{\sqrt{l_i}+s}{k^2\times l_i}\to 0\quad(i\to\infty).$$

这就证明了 $\liminf\limits_{i\to\infty}\frac{1}{n_i}\sum\limits_{j=0}^{n_i-1}(V)=0.$ □

至此, 我们完成了 $S_m\neq C_z,\forall m\in M_z$ 的证明.

注记 6.1.6　利用命题 6.1.5 的证明方法, 我们还可以得到进一步的结论: 设

$$m=\lim_{i\to\infty}\frac{1}{n_i}\sum_{j=0}^{n_i-1}\delta_{\sigma^j(z)}\in M_z.$$

(1) 如果序列 $\{k_i\}$ 无界 (情形 1), 则 $m=\delta_0$(由不动点 $(00\cdots)$ 生成的原子测度).

(2) 如果序列 $\{k_i\}$ 有界 (情形 2), 则 $m = \lambda\delta_0 + (1-\lambda)\mu_k$, 其中 μ_k 是周期点 $(D_kD_k\cdots)$ 生成的不变测度, 而参数 $\lambda \in (0,1]$ 是由 z 的前 n_i 项中 0 出现的频率和 D_k 出现的频率 $(i \to \infty)$ 的极限所决定. 这里留下一个问题, 就是这里的 $m = \lambda\delta_0 + (1-\lambda)\mu_k \in M_z$? 即 M_z 是否有凸结构?

从上面的讨论可以看出, 当一个紧致系统出现真正的弱 (拟弱) 几乎周期点时, 它的轨道就会呈现非常复杂的动力性状, 考虑这样系统的拓扑熵 (是否有正熵) 就是一个非常有意义的开问题. 一般而言, 我们希望得到这样的结果, 即某个紧致系统, 当出现什么样的点, 系统就有正拓扑熵.

6.2 弱几乎周期点的进一步分类

设 (X,f) 是紧致系统. 我们已经证明

$$\left\{x \in W(f) | \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)} \to m, \forall m \in E(X,f)\right\}$$

是一个全概率集合. 用 $W_0(f)$ 表示这样的点的集合.

设 $x \in W_0(f)$ 有下述两种情况, 即

(1) 存在 $m \in M_x$, 使得 $h_m(f) > 0$, 用 $W_{0,1}$ 表示这样的点的集合;

(2) $h_m(f) = 0, \forall m \in M_x$, 用 $W_{0,0}$ 表示这样点的集合.

据变分原理, 在第一种情况, 有 $\mathrm{ent}(f) > 0$, 而第二种情况有 $\mathrm{ent}(f) = 0$. 因此

$$W_{0,1} = \varnothing \Leftrightarrow \mathrm{ent}(f) = 0,$$

所以如何刻画系统出现哪种情况是一个重要问题. 这是我们在文献 [104] 中提出的一个开问题.

定理 6.2.1 $\mathrm{ent}(f) = \mathrm{ent}(f|_{M(f)}) = \sup\limits_{x \in W_0(f)}\{\mathrm{ent}(f|_{\omega(x,f)})\} = \sup\limits_{x \in W_{0,1}(f)}\{\mathrm{ent}(f|_{\omega(x,f)})\}$.

证明从略.

定理 6.2.2 设 $m \in E(X,f), f(X) = X$, 则下述条件等价:

(1) 对每一非空开集 $U \subset X, m(U) > 0$;

(2) $S_m = X$;

(3) 存在 $x \in W_0(f)$, 使得 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)} \to m$ 且 $\omega(x,f) = X$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 $S_m \neq X$. 则 $X - S_m$ 是非空开集. 设 $x \in X - S_m$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $m(V(x,\varepsilon)) = 0$. 于是 $\alpha = \{V(x,\varepsilon) | m(V(x,\varepsilon)) = 0, \forall x \in X - S_m\}$ 是 $X - S_m$ 的一个开覆盖, X 满足第二可数性公设, 因而是 Lindelöff 空间, $X - S_m$ 亦如此[52], 因而 α 有可数子覆盖, 因此 $m(X - S_m) = 0$, 与假设矛盾, 即 $S_m = X$.

(2)⇒(3) 因为 $W_0(f)$ 是全概率集合, 故存在 $x \in W_0(f) \cap S_m$, 使得 $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)} \to m$. $\omega(x,f)=X$ 是显然的.

(3)⇒(1) 因为 $x \in W(f)$, 故 $S_m=\omega(x,f)=X$, 且 X 的任何非空开集, 也是 S_m 的非空开集, 故有正 m 测度. □

定理 6.2.3　下述条件等价:

(1) $W_0(f)=P(f)$;

(2) $m(P(f))=1, \forall m \in M(X,f)$;

(3) f *无非原子遍历测度.*

证明　(1)⇒(2) 因为 $P(f)$ 是可测的, 因此 $W_0(f)$ 是全概率可测集合, 故

$$m(W_0(f))=m(P(f))=1, \quad \forall m \in M(X,f).$$

(2)⇒(3) 据 (2), $P(f)$ 是全概率可测集合, 因此对任意的 $m \in E(X,f)$, 存在 $x \in P(f)$ 使得

$$m=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)},$$

即 f 的每一个遍历测度都由周期点生成, 都是原子测度.

(3)⇒ (1) 据定义, 对任意的 $m \in E(X,f)$, 存在 $x \in W_0(f)$, 使得

$$m=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)},$$

但 m 是原子测度, 因此 $x \in P(f)$, 故 $W_0(f)=P(f)$. □

因为原子遍历测度有零测度熵, 下述推论简单:

推论 6.2.4　$\mathrm{ent}(f)>0 \Rightarrow P(f) \subsetneqq W_0(f)$.

6.3　拓扑熵, 混沌和混沌的三个层次

设 (X,f) 为紧致系统或用 $C^0(X)$ 表示 X 上全体连续映射的集合, 并赋予一致收敛拓扑如下:

$$\rho(f,g)=\sup_{x\in X}\{d(f(x),g(x)):\forall f,g \in C^0(X)\}. \tag{6.3.1}$$

每个紧致系统对应一个拓扑熵, 因此有下述函数:

$$\begin{cases}\mathrm{ent}: C^0(X) \to [0,\infty),\\ f \mapsto \mathrm{ent}(f).\end{cases} \tag{6.3.2}$$

定理 6.3.1[5] 设 $f \in C^0(I)$, 则当 $\mathrm{ent}(f) < \infty$ 时, ent 在 f 处不连续.

此外, 文献 [5] 还构造了一个 $f \in C^0(I), \mathrm{ent}(f) = \infty$.

下面设 M 是一个连通有限复合形, 且 $\dim(M) > 1, M$ 的多面体记为 $|M|$(在某个欧氏空间内). 设 d 是该欧氏空间的度量. 在 $C^0(|M|)$ 上定义一致收敛拓扑 (见 (6.3.1)).

定理 6.3.2

$$\mathrm{ent} : C^0(|M|) \to [0, \infty)$$

是满映射, 即 $\mathrm{ent}(C^0(|M|)) = [0, \infty)$.

证明 下面先对线段情形证明定理的结论成立. 对任意 $T \geqslant 0$, 构造

$$f \in C^0(I), \quad 使\ \mathrm{ent}(f) = T.$$

当 $T = \infty$ 时, 据文献 [13], 这样的 f 存在. 下面假设 $0 \leqslant T < \infty$.

取 I 的分割

$$0 = c_0 < \cdots < c_m \leqslant 1,$$

使

$$c_1 - c_0 = c_2 - c_1 = \cdots = c_m - c_{m-1} = \frac{1}{10^T} \ 和\ 1 - c_m \leqslant \frac{1}{10^T}.$$

定义映射 $\overline{f} : \{c_0, c_1, \cdots, c_m\} \to I$ 如下:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} 0, & 如果\ x = c_{2i},\ 0 \leqslant 2i \leqslant m, \\ 1, & 如果\ x = c_{2i+1},\ 0 \leqslant 2i+1 \leqslant m. \end{cases}$$

令 $f : I \to I$ 是 $\overline{f}$ 到 I 上的连续扩充, 满足下述条件:

(1) 如果 $c_m < 1$, 则

$$f(x) = \begin{cases} (1 - c_m) \times 10^T, & 如果\ m = 2k, \\ 1 - (1 - c_m) \times 10^T, & 如果\ m = 2k+1. \end{cases}$$

(2) f 在每个 $[c_i, c_{i+1}]$ 和 $[c_m, 1] (i = 0, 1, \cdots, m-1)$ 上是线性的.

容易验证, f 是完全确定的且连续, 其斜率为 $\pm 10^T$, 据文献 [55], $\mathrm{ent}(f) = \log 10^T = T$.

一般情形的证明. 任取线段 $[a, b] \subset |M|$, 对任给 $T \geqslant 0$, 构造 $\overline{f} : [a, b] \to [a, b]$, 使 $\mathrm{ent}(\overline{f}) = T$. 据 Tietze 扩充定理 (见附录 A), 存在 $\overline{f}$ 到 $|M|$ 上的连续扩充 $f : |M| \to |M|, f|_{[a,b]} = \overline{f}$.

断言: $\mathrm{ent}(f) = \mathrm{ent}(\overline{f})$. 易见 $\mathrm{ent}(f) \geqslant \mathrm{ent}(\overline{f})$. 又据非游荡集的定义, 有 $\Omega(\overline{f}) \subset \Omega(f)$. 令

$$f_1 = f|_{\Omega(f)} = \overline{f}|_{\Omega(f)} : \Omega(f) \to \Omega(f),$$

显然 $\mathrm{ent}(f)=\mathrm{ent}(f_1)\leqslant\mathrm{ent}(\overline{f_1})$, 断言得证. 因此 $\mathrm{ent}(f)=\mathrm{ent}(\overline{f})=T$. □

下面引进一些符号.

设 $f\in C^0(|M|),\varepsilon>0$. 记 f 的 ε 邻域为

$$N(f,\varepsilon)\subset C^0(|M|),\ 即\ N(f,\varepsilon)=\{g\in C^0(|M|):\rho(g,f)<\varepsilon\}.$$

记 f 的图像集合为

$$\mathrm{gra}(f)\subset|M|\times|M|,\ 即\ \mathrm{gra}(f)=\{(x,y)\in|M|\times|M|:f(x)=y\}.$$

记 $\mathrm{gra}(f)$ 的 ε 邻域为

$$U(f,\varepsilon)\subset|M|\times|M|,\ 即\ U(f,\varepsilon)=\{(x,y):d(f(x),y)<\varepsilon\}.$$

命题 6.3.3　$\forall g\in N(f,\varepsilon)\Leftrightarrow\mathrm{gra}(g)\subset U(f,\varepsilon)$.

命题 6.3.4　*$\forall p\in|M|$, 存在 p 的邻域 $V(p)$ 和 $f(p)$ 的邻域 $V(f(p))$, 使得 $\overline{V(p)}\times\overline{V(f(p))}\subset U(f,\varepsilon)$.*

这两个命题证明简单, 从略.

我们还需少许代数拓扑和同伦论的术语和命题, 参见文献 [31], [37].

用 $Sd^{(m)}M(m>0)$ 表示 M 的第 m 次重心重分, 并记 $Sd^0M=M$. 对任意 $p\in|M|$, 分别记 p 对 $Sd^{(m)}M$ 的闭星形和开星形为 $St_p^{(m)},st_p^{(m)}$, 前者是 $Sd^{(m)}M$ 的一个子复合形, 后者是 p 的一个开邻域 (相对 $|M|$), 且 $|St_p^{(m)}|=\overline{st_p^{(m)}}$. 又记 $St_p^{(m)}$ 中所有不包含 p 的单纯形的集合为 $L_p^{(m)},L_p^{(m)}$ 是 $St_p^{(m)}$ 的子复合形, 且 $|L_p^{(m)}|=|St_p^{(m)}|-|st_p^{(m)}|$.

命题 6.3.5　*设 $f\in C^0(X),\varepsilon>0$, 则对所有 $p\in|M|$, 存在 $m\geqslant0$, 使 $|St_p^{(m)}|$ 的直径一致地小于 ε.*

证明见文献 [31].

命题 6.3.6　*设 $f\in C^0(|M|),\varepsilon>0$, 且*

$$\{p=p_0,f(p)=p_1,\cdots,f^{n-1}(p)=p_{n-1}\}$$

为 f 的一个周期轨道, 周期为 $n\geqslant1$, 则存在 $m_0\geqslant m_1\geqslant\cdots\geqslant m_{n-1}\geqslant0$, 使下述条件成立:

(1) $|St_{p_i}^{(m_i)}|\cap|St_{p_j}^{(m_j)}|=\varnothing,0\leqslant i<j\leqslant n-1$;

(2) $f(|St_{p_i}^{(m_i)}|)\subset|St_{p_{i+1}}^{(m_{i+1})}|,i=0,1,\cdots,n-2$ 和 $|St_{p_{n-1}}^{(m_{n-1})}|\times f(|St_{p_{n-1}}^{(m_{n-1})}|)\subset U(f,\varepsilon)$;

(3) $|St_{p_i}^{(m_i)}|\times|St_{p_{i+1}}^{(m_{i+1})}|\subset U(f,\varepsilon),i=0,1,\cdots,n-2$ 和 $|St_{p_{n-1}}^{(m_{n-1})}|\times|St_{p_0}^{(m_0)}|\subset U(f,\varepsilon)$.

证明 由假设 $f(p_{n-1})=p$. 据命题 6.3.4, 易于证明, 存在 p_i 的邻域 $V(p_i)$, 使

$$\overline{V(p_i)}\cap\overline{V(p_j)}=\varnothing,\quad 0\leqslant i,j\leqslant n-1,$$

$$\overline{V(p_i)}\times\overline{V(p_{i+1})}\subset U(f,\varepsilon),\quad i=0,1,\cdots,n-2,$$

$$\overline{V(p_{n-1})}\times\overline{V(p_0)}\subset U(f,\varepsilon)$$

和

$$\overline{V(p_{n-1})}\times f(\overline{V(p_{n-1})})\subset U(f,\varepsilon).$$

据命题 6.3.5, 存在整数 $m_{n-1}\geqslant 0$, 使 $|St_{p_{n-1}}^{(m_{n-1})}|\subset V(p_{n-1})$. 据命题 6.3.5 和连续性, 存在 $m_{n-2}\geqslant m_{n-1}$ 使 $|St_{p_{n-2}}^{(m_{n-2})}|\subset V(p_{n-2})$ 和 $f(|St_{p_{n-2}}^{(m_{n-2})}|)\subset|St_{p_{n-1}}^{(m_{n-1})}|$, 归纳地, 存在 $m_i\geqslant m_{i+1}$, 使

$$|St_{p_i}^{(m_i)}|\subset V(p_i)$$

和

$$f(|St_{p_i}^{(m_i)}|)\subset|St_{p_{i+1}}^{(m_{i+1})}|,\quad i=0,1,\cdots,n-2.$$

容易看出, 对上述 $m_0\geqslant m_1\geqslant\cdots\geqslant m_{n-1}$, 条件 (1), (2), (3) 成立. □

命题 6.3.7 *设 $p\in|M|$ 为任意点, 又设任意两条路径 $\alpha,\beta:I\to|M|,\alpha(0)=\beta(0)=p$, 则 α,β 相对于点 p 同伦.*

命题 6.3.8 *设 L 为 M 的任意子复合形, 则 (M,L) 具有绝对同伦扩充性质.*

上述两个命题的证明可在同伦论找到, 例如文献 [37], 这里从略.

命题 6.3.9 *假设和 $m_0\geqslant m_1\geqslant\cdots\geqslant m_{n-1}$, 同命题 6.3.6, 对每一个 $i=0,1,\cdots,n-1$, 任取不同于 p_i 的 $q_i\in st_{p_i}^{(m_i)}$ (注意 $|M|$ 连通, 且 $\dim(M)>1$, 故 q_i 存在, 且线段 $[p_i,q_i]\subset st_{p_i}^{(m_i)}$ 和 $[p_i,q_i]\cap|L^{(m_i)}p_i|=\varnothing$), 则存在 $h\in N(f,\varepsilon)$ 使 $h^{n-1}|_{[p_0,q_0]}:[p_0,q_0]\to[p_{n-1},q_{n-1}]$ 是同胚, 且 $h^{n-1}(p_0)=p_{n-1}$.*

证明 对每一个 $i=0,1,\cdots,n-1$, 定义映射

$$\overline{h}:[p_i,q_i]\cup|L^{(m_i)}p_i|\to f(|St_{p_i}^{(m_i)}|),$$

使 $\overline{h}_i|_{[p_i,q_i]}:[p_i,q_i]\to[p_{i+1},q_{i+1}]$ 是同胚, 且 $\overline{h}_i(p_i)=p_{i+1}$ 和 $\overline{h}_i|_{|L_{p_i}^{(m_i)}|}=f|_{|L_{p_i}^{(m_i)}|}$. 据命题 6.3.7, 不难证明 $\overline{h}_i$ 和 $f|_{[p_i,q_i]\cup|L_{p_i}^{(m_i)}|}$ 相对于 p_i 同伦. 显然, 存在 $St_{p_i}^{(m_i)}$ 的一个重分, 使 $[p_i,q_i]\cup|L_{p_i}^{(m_i)}|$ 成为 $|St_{p_i}^{(m_i)}|$ 的一个子多面体 (相对新的剖分). 据命题 6.3.8, 易于证明, 存在 $\overline{h}_i$ 到 $|M|$ 上的一个连续扩充 $h_i:|M|\to|M|$, 使下述条件成立:

(1) $h_i|_{[p_i,q_i]\cup|L_{p_i}^{(m_i)}|}=\overline{h}_i$;

(2) $h_i(St_{p_i}^{(m_i)})\subset f(|St_{p_i}^{(m_i)}|)$;

(3) $h_i|_{|M|-st_{p_i}^{(m_i)}} = f|_{|M|-st_{p_i}^{(m_i)}}$.

由命题 6.3.6, 易见 $\text{gra}(h_i) \subset U(f,\varepsilon)$, 即 $h_i \in N(f,\varepsilon), i=0,1,\cdots,n-2$, 且

$$h_{n-2}h_{n-3}\cdots h_0|_{[p_0,q_0]} : [p_0,q_0] \to [p_{n-1,q_{n-1}}]$$

是同胚, 且 $h_{n-2}h_{n-3}\cdots h_0(p_0) = p_{n-1}$.

定义映射

$$h: |M| \to |M|,$$

使

$$h|_{|St_{p_i}^{(m_i)}|} = h_i|_{|St_{p_i}^{(m_i)}|}, \quad i=0,1,\cdots,n-2$$

和

$$h|_{|M|-\bigcup\limits_{i=0}^{n-2} st_{p_i}^{(m_i)}} = f|_{|M|-\bigcup\limits_{i=0}^{n-2} st_{p_i}^{(m_i)}}.$$

h 是完全确定的且连续. 易见 $\text{gra}(h) \subset U(f,\varepsilon)$, 即 $h \in N(f,\varepsilon)$ 且

$$h^{n-1}|_{[p_0,q_0]} = h_{n-2}\cdots h_0|_{[p_0,q_0]}.$$

这个 h 即满足命题要求. □

命题 6.3.10 集合 $\{f \in C^0(|M|) : P(f) \neq \varnothing\}$ 在 $C^0(|M|)$ 中处处稠密.

证明 对任意 $f \in C^0(|M|)$ 和任意 $\varepsilon > 0$, 我们证明, 存在 $g \in N(f,\varepsilon)$, 使 $P(g) \neq \varnothing$. 这样就完成了证明. 如果 $P(f) \neq \varnothing$, 取 $g = f$ 即可. 下设 $P(f) = \varnothing$.

任取一点 $x \in |M|$. 据紧致性, 存在 $n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots$, 使 $\{f^{n_i}(x)\}$ 收敛. 设对 $n_i < n_j, d(f^{n_i}(x), f^{n_j}(x)) < \varepsilon$. 用类似命题 6.3.8 证明的方法, 可以构造一个连续映射 $g: |M| \to |M|, g \in N(f,\varepsilon)$, 使 $\{f^{n_i}(x), f^{n_i+1}(x), \cdots, f^{n_j-1}(x)\}$ 是 g 的一个周期轨道. □

定理 6.3.11 设 $f \in C^0(|M|), T \geqslant 0$, 则对 f 的任意邻域 $N(f,\varepsilon), \varepsilon > 0$, 存在 $g \in N(f,\varepsilon)$ 使得 $\text{ent}(g) \geqslant T$.

证明 设 $f \in C^0(|M|), T \geqslant 0, \varepsilon > 0$ 已给定. 据命题 6.3.10, 不失普遍性, 可以假设 $P(f) \neq \varnothing$. 设 $\{p = p_0, f(p) = p_1, \cdots, f^{n-1}(p) = p_{n-1}\}$ 是 f 的一个周期轨道, 周期为 $n \geqslant 1$. 令 h 是引理 6.3.9 中定义的映射. 易见 $h(p_{n-1}) = p$. 据定理 6.3.2(相差一个拓扑共轭), 存在连续映射 $\overline{g}: [p_0,q_0] \to [p_{n-1},q_{n-1}]$, 使 $\text{ent}(\overline{g}) = nT$.

因为 $h^{n-1}|_{[p_0,q_0]} : [p_0,q_0] \to [p_{n-1},q_{n-1}]$ 是同胚, 且 $h^{n-1}(p_0) = p_{n-1}$, 故可定义连续映射 $\overline{h} : [p_{n-1},q_{n-1}] \to [p_0,q_0]$, 使 $\overline{h} = \overline{g}(h^{n-1})^{-1}|_{[p_{n-1},q_{n-1}]}$, 因此 $\overline{g} = \overline{h}h^{n-1}|_{[p_0,q_0]}$.

用命题 6.3.9 所用过的方法, 可以构造连续映射 $g: |M| \to |M|$, 满足下述条件:

(1) $g|_{[p_{n-1},q_{n-1}]} = \overline{h}$;

(2) $g(|St^{(m_{n-1})}_{p_{n-1}}|) \subset h(|St^{(m_{n-1})}_{p_{n-1}}|) = f(|St^{(m_{n-1})}_{p_{n-1}}|)$;

(3) $g|_{|M|-st^{(m_{n-1})}_{p_{n-1}}} = h|_{|M|-st^{(m_{n-1})}_{p_{n-1}}}$.

易见 $\mathrm{gra}(g) \subset U(f,\varepsilon)$, 即 $g \in N(f,\varepsilon)$. 又 $g^n|_{[p_0,q_0]} = gh^{n-1}|_{[p_0,q_0]} = \overline{h}h^{n-1}|_{[p_0,q_0]} = g$. 因此 $\mathrm{ent}(g) = \dfrac{1}{n}\mathrm{ent}(g^n) \geqslant \dfrac{1}{n}\mathrm{ent}(\overline{g}) = \dfrac{1}{n}nT = T$. □

推论 6.3.12 设 $f \in C^0(|M|)$. 若 $\mathrm{ent}(f) < \infty$, 则 ent 在 f 处不连续.

推论 6.3.13 集合 $\{f \in C^0(|M|) : \mathrm{ent}(f) > 0\}$ 在 $C^0(|M|)$ 中处处稠密.

上面两个推论是定理 6.3.11 的明显结果.

容易证明, 用任意连通有限可剖空间 (维数不小于 1) 代替 $|M|$, 定理 6.3.11、推论 6.3.12 和 6.3.13 的结论依然成立.

我们在定理 2.1.73 中证明, 对线段动力系统而言, 正熵与限制在非游荡集上的混沌是等价的. 这里留下一个问题, 即这个结果对一般系统是否也成立? 例 6.3.1 说明这个结论对一般系统不成立. 但我们说过, 非游荡集上面还有干扰, 上面的结论还不能说明正熵与混沌不等价. 下面举例说明存在在测度中心上有零熵的混沌系统, 因此正熵与混沌不等价得以最后证明.

例 6.3.1 存在紧致系统 (X,f), $f|_{M(f)}$ 混沌但 $\mathrm{ent}(f) = 0$.

设 $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ 为两个符号 $S = \{0,1\}$ 生成的符号空间上的转移自映射. Σ_2 上的度量定义如下:

$$\rho(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}, \quad \forall x = (x_0x_1\cdots), y = (y_0y_1\cdots) \in \Sigma_2.$$

易见 x, y 充分靠近等价于存在充分大的 $N > 0$, 使得 $n < N$ 时, $x_n = y_n$.

$$\begin{cases} \sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2, \\ (x_0x_1\cdots) \mapsto (x_1x_2\cdots) \end{cases} \tag{6.3.3}$$

是其上转移自映射.

记 $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是 S 上的符号段集合, 并对每一个 $i \geqslant 0$, 记

$$K_i = \{a_0I_0a_1I_1\cdots a_{i-1}I_{i-1}a_i, a_j \in S, 0 \leqslant j \leqslant i\}.$$

易见, K_i 由 S 上 2^{i+1} 个不同的符号段构成. 称 $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是正规的, 如果对所有 $i \geqslant 0$.

(N_1) K_i 中所有 k^{i+1} 个不同元素的不同符号段中至少有一个出现在 I_i 中;

(N_2) 对每一个 $a \in S$, I_ia 可用 K_i 表示.

引理 6.3.14 S 上存在正规的符号段序列.

证明 用归纳法证明.

令 $I_0=(01)$. 易见 I_0 满足 (N_1) 和 (N_2).

下设 $m\geqslant 1$, 且 $I_0,I_1,\cdots,I_{m-1}$ 已定义且满足 (N_1) 和 (N_2). 记 j_m 为符号段集合

$$K_m=\{a_0I_0\cdots a_{m-1}I_{m-1}a_m,a_i\in S,0\leqslant i\leqslant m\}$$

中所有不同符号段的任意一个排列. 令

$$I_m=j_m0I_00I_1\cdots0I_{m-1}.$$

不难验证, 对 I_m, 条件 (N_1) 和 (N_2) 成立. 按归纳法, 引理得证. □

引理 6.3.15 *设 $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ 为 S 上正规的符号段序列,*

$$K_i=\{a_0I_0\cdots a_{i-1}I_{i-1}a_i,a_j\in S,0\leqslant 0\leqslant i\},\quad \forall i\geqslant 0.$$

对每一个 $j\geqslant 0$, 若 $i\geqslant j$, 且 $A\in K_i$, 则 A 可用 K_j 表示.

证明 给定 $j\geqslant 0$, 对 i 用归纳法证明.

当 $i=j$, 结论显然成立.

下设对 $l\geqslant j$ 结论已成立. 我们来证明结论对 $i=l+1$ 也成立. 设 $A\in K_{l+1}$. 据定义, 存在 $a_0,a_1,\cdots,a_{l+1}\in S$, 使得

$$A=a_0I_0\cdots a_lI_la_{l+1}.$$

记

$$B=a_0I_0\cdots I_{l-1}a_l,$$

则 $B\in K_l$. 据 $(\mathrm{N}_2),I_la_{l+1}$ 可用 K_i 表示, 因此 A 可用 K_l 表示. 据归纳法假设, K_l 的每一个元素可用 K_j 表示, 因此 A 可用 K_j 表示. 这证明结论对 $i=l+1$ 也成立. □

引理 6.3.16 *Σ_2 中存在不可数子集 E, 使得其中任意不同两点*

$$x=(x_0x_1\cdots),\quad y=(y_0y_1\cdots),\quad x_n\neq y_n$$

对无限多 n 成立.

证明 对任意 $x=(x_0x_1\cdots),y=(y_0y_1\cdots)\in\Sigma_2$, 记 $x\sim y$, 如果 $x_n\neq y_n$ 只对有限个 n 成立. 不难验证, $\sim$ 是 Σ_2 上一个等价关系. 记 $\Sigma_2/\sim$ 为商空间. 设 $x\in\Sigma_2$, 易于证明, 集合

$$\{y\in\Sigma_2|y\sim x\}$$

是可数的, 因此 $\Sigma_2/\sim$ 是不可数的. 用选择公理, 在 $\Sigma_2/\sim$ 的每一等价类中取一代表元素构成 Σ_2 的一个不可数子集合 E, 则 E 满足要求. □

引理 6.3.17 *设 $x=(x_0x_1\cdots)\in\Sigma_2$. 若对任意 $j\geqslant 0$, 存在 $N>0$, 使当 $i\geqslant 0$ 时, $(x_0x_1\cdots x_j)$ 出现在 $(x_ix_{i+1}\cdots x_{i+N})$ 中, 则 $x\in A(\sigma)$.*

证明从略.

定理 6.3.18 *存在 (Σ_2,σ) 的混沌的具有零熵的极小子转移.*

证明 设 $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ 为按引理 6.3.14 构造的 S 上的正规的符号段序列. 据引理 6.3.16, 取 Σ_2 的不可数子集 E 使得当 $x,y\in\Sigma_2$ 为不同两点时, $x_n\neq y_n$ 对无限多 n 成立.

定义 $\varphi:E\to\Sigma_2$ 使得

$$\varphi(x)=x_0I_0x_1I_1\cdots,\quad \forall x=(x_0x_1\cdots)\in E.$$

记 $D=\varphi(E)$. 下面依次证明:

(1) D 是 σ 的不可数混沌集.

易见 φ 是单射, 故 E 不可数蕴涵 D 不可数. 对任意 $a\in D$, 按定义存在 $(a_0a_1\cdots)\in E$, 使得

$$a=a_0I_0a_1I_1\cdots.$$

记

$$m_i=|(a_0I_0\cdots a_{i-1}I_{i-1}a_i)|.$$

显然

$$\sigma^{m_i}(a)=I_ia_{i+1}\cdots.$$

注意到 I_i 与 a 的选取无关, 且当 $i\to\infty$ 时, $|I_i|\to\infty$, 对 D 中任意两点 x,y, 有

$$\liminf_{n\to\infty}\rho(\sigma^n(x),\sigma^n(y))\leqslant\lim_{i\to\infty}\rho(\sigma^{m_i}(x),\sigma^{m_i}(y))=0.\tag{6.3.4}$$

又据 E 的性质, 当 $x,y\in D$ 且 $x\neq y$ 时, 存在充分大的 n 使得 $x_n\neq y_n$, 据度量 ρ 的定义, 有

$$\limsup_{n\to\infty}\rho(\sigma^n(x),\sigma^n(y))\geqslant 1.$$

因此 D 是混沌集.

(2) 对每一个 $y\in D,\omega(y,\sigma)$ 是极小的, 且 $D\subset\omega(y,\sigma)$.

设 $y=(y_0y_1\cdots)\in D$. 据定义, 存在 $b=(b_0b_1\cdots)\in E$, 使

$$y=\varphi(b)=b_0I_0b_1I_1\cdots=(y_0y_1\cdots).$$

注意, $(y_0y_1\cdots y_p)$ 是 $b_0I_0b_1I_1\cdots$ 的前 $p+1$ 项的符号段. 显然

$$(y_0y_1\cdots y_p)<(b_0I_0b_1I_1\cdots I_{p-1}b_p),\quad \forall p\geqslant 0,$$

即前者出现在后者中.

对给定的 $p \geqslant 0$, 据引理 6.3.15, y 可以表成形如 $a_0I_0\cdots I_pa_{p+1}$ 的符号段的一个无穷排列, 其中 $a_i \in S, 0 \leqslant i \leqslant p+1$. 令

$$N = 3|(b_0I_0\cdots I_pa_{p+1})|.$$

对给定的 $i \geqslant 0$, 易见 $(y_iy_{i+1}\cdots y_{i+N})$ 包含某个符号段 $a_0I_0\cdots I_pa_{p+1}$, 即

$$a_0I_0\cdots I_pa_{p+1} < y_iy_{i+1}\cdots y_{i+N}.$$

因此, 据 (N_1), 有

$$(y_0y_1\cdots y_p) < b_0I_0\cdots I_{p-1}b_p < a_0I_0\cdots I_pa_{p+1} < (y_iy_{i+1}\cdots y_{i+N}).$$

据引理 6.3.17, $y \in A(\sigma)$. 因此 $\omega(y,\sigma)$ 是极小的.

下面证明 $D \subset \omega(y,\sigma)$. 设 $z \in D$. 据 (6.3.4),

$$\omega(y,\sigma)\cap\omega(z,\sigma) \neq \varnothing.$$

因为它们都是极小集, 故

$$\omega(y,\sigma) = \omega(z,\sigma).$$

因此

$$D \subset \bigcup_{y\in D}\omega(y,\sigma) = \omega(y,\sigma), \quad \forall y \in D.$$

(3) $\mathrm{ent}(\sigma|_{\omega(y,\sigma)}) = 0, y \in D$.

据 D 的定义和引理 6.3.15, 对 $i \geqslant 0, D$ 中每一点都可用

$$K_i = \{a_0I_0\cdots I_{i-1}a_i, a_j \in S, 0 \leqslant j \leqslant i\}$$

表示, 即 y 可以表为形如 $a_0I_0\cdots I_{i-1}a_i$ 的符号段的无穷排列. 显然 K_i 中符号段有相同长度, 记为 m_i.

对任意 $A \in K_i$, 用 A_{j1} 和 A_{j2} 表示 S 上符号段, 使得 $|A_{j1}| = j, |A_{j2}| = m_i - j$且$A = A_{j1}A_{j2}$. 易见, 对每一个 $j, 1 \leqslant j \leqslant m_i, A$ 的这种表示存在且唯一. 现对每一个 $j = 1, 2, \cdots, m_i$, 记

$$M_j = \{C | C = B_{j2}A_{j1}, \ \forall A, B \in K_i\}.$$

定义 $\varphi_j : K_i \to M_j$, 使得

$$\varphi_j(A) = A_{j2}A_{j1}, \quad \forall A \in K_i.$$

由 K_i 的构造易见, 当 $A, B \in K_i$ 时, 亦有 $A_{j1}B_{j2} \in K_i$. 这证明 φ_j 是满射. 所以

$$\sharp(M_j) \leqslant \sharp(K_i).$$

如前所述, K_i 中包含 2^{i+1} 个不同符号段, 因此

$$\sharp(M_j) \leqslant 2^{i+1}, \quad j = 1, 2, \cdots, m_i.$$

设 C 为 S 上长度为 m_i 的且出现在 $y \in D$ 中的符号段, 即存在 $l \geqslant 0$, 使得 C 与 $\sigma^l(y)$ 的前 m_i 个符号对应相等. 因为 $y \in D$ 可由 K_i 中符号段无限排列而得到, 不难看出, 存在 $A, B \in K_i$, 使得对某个 $j, 1 \leqslant j \leqslant m_i$, 有

$$C = B_{j2}A_{j1},$$

即 $C \in M_j$. 因此

$$Q_{m_i}(\{y\}) \leqslant \sum_{j=1}^{m_i} \sharp(M_j) \leqslant 2^{i+1}m_i. \tag{6.3.5}$$

设 A 是 S 上长度为 m_i 且可出现在 $\omega(y,\sigma)$ 中一点 $x = (x_0x_1\cdots)$ 内的符号段. 显然存在 $n > 0$ 使得 A 出现在 $(x_0x_1\cdots x_{n-1})$ 内. 因为 $x \in \omega(y,\sigma)$, 故存在 $N > 0$, 使得 $\sigma^N(y)$ 与 x 的前 n 个符号对应相等. 这意味着 A 可以在 y 中出现. 这证明可以出现在 $\omega(y,\sigma)$ 中一点内的长度为 m_i 的符号段也可以出现在 y 内, 因此, 有

$$Q_{m_i}(\omega(y,\sigma)) \leqslant Q_{m_i}(\{y\}) \leqslant 2^{i+1}m_i,$$

其中后一不等式由 (6.3.5) 给出.

另一方面, 据 m_i以及$\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ 的定义, 有

$$m_i \geqslant |I_{i-1}| \geqslant 2^i.$$

最后, 据

$$\mathrm{ent}(\sigma|_{\omega(y,\sigma)}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Q_n(\omega(y,\sigma)),$$

其中 $Q_n(y)$ 表示符号段集合

$$\{A = (a_0A_1\cdots a_{n-1}) | \exists x \in \omega(y,\sigma), A < x\}$$

的基数[50], 有

$$\begin{aligned}\mathrm{ent}(\sigma|_{\omega(y,\sigma)}) &= \lim_{i\to\infty} \frac{1}{m_i} \log Q_{m_i}(\omega(y,\sigma)) \leqslant \lim_{i\to\infty} \frac{1}{m_i} \log 2^{i+1}m_i \\ &\leqslant \lim_{i\to\infty} \left(\frac{i+1}{2^i} \log 2 + \frac{1}{m_i} \log m_i \right) = 0.\end{aligned}$$

以上证明了, 当 $y \in D$ 时, 子转移 $\sigma|_{\omega(y,\sigma)} : \omega(y,\sigma) \to \omega(y,\sigma)$ 满足定理要求. □

至此, 我们证明了正拓扑熵与混沌不等价. 根据上述讨论, 对紧致系统 (X, f), 可以得到混沌的三个层次:

(1) $f : X \to X$ 混沌;

(2) $f|_{\Omega(f)} : \Omega(f) \to \Omega(f)$ 混沌;

(3) $f|_{M(f)} : M(f) \to M(f)$ 混沌.

从遍历理论角度, 只有第三种混沌才是真正的混沌, 另外两种混沌可以认为是假象, 但上述例子说明, 真正的混沌似乎也弱于正拓扑熵, 但仅凭上述例子还不能得出这个结论. 下述定理严格说明混沌弱于正拓扑熵.

定理 6.3.19 正拓扑熵蕴涵混沌.

证明参见文献 [51] 及其参考文献.

第 7 章　流的弱几乎周期点

本章主要目的是把弱几乎周期点的概念推广到流的情形. 离散型动力系统 (即迭代映射) 和连续型动力系统 (流) 大部分概念可以平行发展, 但两者有重大不同. 例如, 熵的概念后者就比前者复杂很多. 我们从流的定义谈起[33],[49].

7.1 流的定义

设 (X,d) 是紧致度量空间. 一个流是指映射

$$\Phi: X \times \mathbb{R} \to X,$$

满足:

(1) $\Phi(x,0)=x, \forall x \in X$;

(2) $\Phi(\cdot,t): X \to X, \forall t \in \mathbb{R}$ 是同胚;

(3) $\Phi(\Phi(x,s),t)=\Phi(x,s+t), \forall s,t \in \mathbb{R}$.

如果把 (3) 记成 $\{\Phi_t \cdot \Phi_s = \Phi_{t+s}\}$, 则在集合 $\{\Phi_t | t \in \mathbb{R}\}$ 上建立了群的结构, 因此有时也把流称为单参数变换群. X 上的概率测度的集合亦记为 $M(X)$, 并记其上的 Borel σ 代数为 $\mathscr{B}(X)$. 关于 Φ 的不变测度、概率测度的定义与离散情形一致, 并同样记 $M(X,\Phi), E(X,\Phi)$ 为其不变测度和遍历测度的集合. Kryloff-Bogoliuboff 证明了下述基本结论.

定理 7.1.1　$M(X) \supset M(X,\Phi) \supset E(X,\Phi) \neq \varnothing$.

7.2 流的弱几乎周期点

定义 7.2.1　$x \in X$ 叫做 Φ 的正向 (负向) 弱几乎周期点, 如果对任意 $\varepsilon>0$, 可以找到 $N>0$, 使得对任意整数 $n>0$, 存在 $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n < nN(-nN < t_n < \cdots < t_1 < t_0)$, 满足 $|t_{i+1}-t_i| \geqslant 1$, $i=0,1,\cdots,n-1$, 且 $\Phi(x,t_i) \in V(x,\varepsilon)$, $i=0,1,\cdots,n$, 其中 $V(x,\varepsilon)$ 表点 x 的 ε 球形邻域.

Φ 的正向和负向弱几乎周期点的集合分别记为 $W_+(\Phi)$ 和 $W_-(\Phi)$, 并记 $W(\Phi)=W_+(\Phi) \cup W_-(\Phi)$, 称作 Φ 的弱几乎周期点集. 易证 $W_+(\Phi)$, $W_-(\Phi)$ 和 $W(\Phi)$ 均对 Φ 不变, 又 $W(\Phi) \subset R(\Phi)$, 其中 $R(\Phi)$ 表 Φ 的 p 稳定点集 (即回复点集). 弱几乎周期点的概念是回复运动概念的推广.

引理 7.2.2　设 $x \in R(\Phi)$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 和 $\Delta t>0$, 使得

$$\Phi(x,t) \in V(x,\delta) \Rightarrow \Phi(x,(t-\Delta t, t+\Delta t)) \subset V(x,\varepsilon), t \in \mathbb{R}.$$

证明 设不然, 易证存在 $\varepsilon > \delta_1 > \cdots > \delta_n > \cdots$, $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$, $\Delta t_1 > \Delta t_2 > \cdots > \Delta t_n > \cdots$, $\lim_{n\to\infty} \Delta t_n = 0$ 和 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$, $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ 满足下述性质: $\Phi(x,t_n) \in V(x,\delta_n)$, 但是存在 $t_n + t'_n \in (t_n - \Delta t_n, t_n + \Delta t_n)$, 使 $\Phi(x, t_n + t'_n) \notin V(x,\varepsilon)$, $\forall n > 0$. 显然, $\lim_{n\to\infty} \Phi(x,t_n) = x$ 和 $\lim_{n\to\infty} t'_n = 0$. 据 Φ 的连续性, 有

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(x, t_n + t'_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(\Phi(x,t_n), t'_n) = \Phi(x,0) = x,$$

这是一个矛盾. □

记 X 上全体连续实函数的集合为 $C(X)$.

$x \in X$ 叫做 Φ 的正向准正规点, 如果

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\Phi(x,t))dt$$

对每一个 $\varphi \in C(X)$ 都存在. Φ 的每一个正向准正规点 x 都生成一个 Φ 的不变概率测度 μ_x, 满足

$$\mu_x(A) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_A(\Phi(x,t))dt,$$

其中 A 是可测集合且 $\mu_x(\partial A) = 0$ (∂A 表 A 的边界点集), 而 χ_A 是 A 的特征函数.

用 U_+ 表示 Φ 的全体正向准正规点的集合, U_+ 对 Φ 不变且有最大概率, 即 U_+ 可测且对 Φ 的每一个不变概率测度都有测度 1.

$x \in X$ 叫做 Φ 的负向准正规点, 如果

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 \varphi(\Phi(x,t))dt$$

对每一个 $\varphi \in C(X)$ 都存在. 用 U_- 表示 Φ 的全体负向准正规点的集合.

定义 7.2.3 $\Phi'(x,t) = \Phi(x,-t)$, $\forall x \in X$, $\forall t \in \mathbb{R}$. *易见 Φ' 也是 X 上的流, 且易于验证 Φ' 和 Φ 有相同的不变概率测度的集合和相同的不变遍历概率测度的集合. 因此, U_- (Φ' 的正向准正规点集) 对 Φ 亦不变且亦有最大概率.*

记 $U = U_+ \cup U_-$. U 对 Φ 不变且有最大概率. 因为 $R(\Phi)$ 有最大概率, 故可取 $U \subset R(\Phi)$.

$x \in U$ 叫做稠密点, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 总有 $\mu_x(V(x,\varepsilon)) > 0$.

引理 7.2.4 *设 $x \in U$, 则 $x \in W(\Phi)$ 蕴涵 x 是稠密点.*

证明 设 $x \in U$ 和 $\varepsilon > 0$, 且 $\mu_x(\partial V(x,\varepsilon)) = 0$ (注意, 这样的 ε 在 $[0,\infty)$ 上是处处稠密的). 令 $\delta > 0$ 和 $\Delta t > 0$ 满足引理 7.2.2 的条件. 对 $\delta > 0$, 令 $N > 0$ 使得对每一整数 $n > 0$, 存在 $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n < nN$, 满足 $t_{i+1} - t_i \geqslant 1$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$,

且 $\Phi(x,t_i)\in V(x,\delta)$, $i=0,1,\cdots,n$. 据引理 7.2.2, $\Phi(x,(t_i-\Delta t,t_i+\Delta t))\subset V(x,\varepsilon)$, $i=0,1,\cdots,n$. 故有

$$\begin{aligned}\mu_x(V(x,\varepsilon))&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\chi_{V(x,\varepsilon)}(\Phi(x,t))dt\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nN}\int_0^{nN}\chi_{V(x,\varepsilon)}(\Phi(x,t))dt\\&\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nN}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\chi_{V(x,\varepsilon)}(\Phi(x,t))dt\\&\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nN}\sum_{i=0}^{n-1}2\Delta t=\frac{2\Delta t}{N}>0,\end{aligned}$$

即 x 是稠密点. □

引理 7.2.5 设 $x\in U$, 若 $x\notin W(\Phi)$ $(x\notin W_-(\Phi))$, 则存在 $\varepsilon>0$, 对任意 $N>0$ 和 $n_0>0$, 存在 $n>n_0$, 使得

$$\frac{1}{nN}\int_0^{nN}\chi_{V(x,\varepsilon)}(\Phi(x,t))dt\leqslant\frac{1}{N}\left(\frac{1}{nN}\int_{-nN}^{0}\chi_{V(x,\varepsilon)}(\Phi(x,t))dt\leqslant\frac{1}{N}\right).\tag{7.2.1}$$

证明 设 $x\notin W_+(\Phi)$, 按定义, 存在 $\varepsilon>0$, 对任意 $N>0$ 和 $n_0>0$, 存在 $n>n_0$, 使得任意 $0\leqslant t_1<\cdots<t_n<nN$, 若 $\Phi(x,t_i)\in V(x,\varepsilon)$, $i=0,1,\cdots,n$, 则至少存在一个 i, $0\leqslant i<n$, 有 $t_{i+1}-t_i<1$. 下面证明 (7.2.1) 成立.

设 $t\in(0,nN)$, 使 $\Phi(x,t)\in V(x,\varepsilon)$, 易证, 存在包含 t 的最大开区间 (τ,τ'), 使 $\Phi(x,(\tau,\tau'))\subset V(x,\varepsilon)$. 因此, 可以得到包含在 $(0,nN)$ 内最多可数个两两不相交的开区间 $\{(\tau_i,\tau_i')\}_{i=1}^{\infty}$, 使得 $\Phi(x,(\tau_i,\tau_i'))\subset V(x,\varepsilon)$, $\forall i>0$. 但 $\Phi(x,t)\notin V(x,\varepsilon)$, $\forall t\in(0,nN)-\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(\tau_i,\tau_i')$. 记 $L=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\tau_i'-\tau_i)$. 显然 L 存在且 $0<L\leqslant nN$. 易见

$$\frac{1}{nN}\int_0^{nN}\chi_{V(x,\varepsilon)}(\Phi(x,t))dt=\frac{1}{nN}\sum_{i=1}^{\infty}(\tau_i'-\tau_i)=\frac{L}{nN}.$$

为证 (7.2.1) 成立, 只需证明 $L\leqslant n$. 下设 $L>n$.

令 $h:[0,nN]\to[0,L]$, 使得

$$h(x)=\begin{cases}0, & \text{如果 } x=0,\\ \sum\limits_{\tau_i'\leqslant x}(\tau_i'-\tau_i), & \text{如果 } x\notin\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(\tau_i,\tau_i'),\\ \sum\limits_{\tau_i'\leqslant x}(\tau_i'-\tau_i)+x-\tau_i, & \text{如果 } x\in(\tau_j,\tau_j'), j\geqslant 1.\end{cases}$$

易见 h 是在上连续的和单调递升的, 且 $\bigcup_{i=1}^{\infty}(\tau_i,\tau_i')$ 是一一的. 因为 $L>n$, h 具连续性, 易证可以选择 $0\leqslant t_0'<\cdots<t_n'<L$, 使得 $t_{j+1}'-t_j'>1, j=0,1,\cdots,n-1$, 且存在 $t_j\in\bigcup_{i=1}^{\infty}(\tau_i,\tau_i')$, 满足 $h(t_j)=t_j'$, $j=0,1,\cdots,n$. 易于看出 $0\leqslant t_0<\cdots<t_n<nN$ 且 $tj+1-t_j>1$, $j=0,1,\cdots,n-1$. 因为 $\Phi(x,t_j)\in V(x,\varepsilon)$, $j=0,1,\cdots,n-1$. 这与假设矛盾, 故 (7.2.1) 成立. 当 $x\notin W_-(\Phi)$ 时, 证明类似. □

引理 7.2.6　*设 $x\in U$. 则 x 是稠密点蕴涵 $x\in W(\Phi)$.*

证明　设 $x\notin W_+(\Phi)$. 据引理 7.2.5, 存在 $\varepsilon>0$, 使 $\mu_x(V(x,\varepsilon))=0$, 且对任意 $N>0$, 存在序列 $\{n_i\}$, 满足

$$\frac{1}{n_iN}\int_0^{n_iN}\chi_{V(x,\varepsilon)}(\Phi(x,t))dt\leqslant\frac{1}{N},\quad \forall i>0.$$

因为

$$\begin{aligned}\mu_x(V(x,\varepsilon))&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\chi_{V(x,\varepsilon)}(\Phi(x,t))dt\\&=\lim_{i\to\infty}\frac{1}{n_iT}\int_0^{n_iN}\chi_{V(x,\varepsilon)}(\Phi(x,t))dt\\&\leqslant\frac{1}{N}.\end{aligned}$$

由 N 的任意性, 即得 $\mu_x(V(x,\varepsilon))=0$. 这证明 x 是稠密点蕴涵 $x\in W_+(\Phi)$. 同样可以证明, x 是稠密点蕴涵 $x\in W_-(\Phi)$. □

据引理 7.2.4、引理 7.2.6 和文献 [43] 第六章定理 26–28, 即可得下列重要结论.

定理 7.2.7　*$x\in W(\Phi)$ 和 $x\in W(\Phi)$ 中生成 Φ 一不变遍历测度的点的子集均 Φ 对不变, 它们的闭包都等于 Φ 的极小吸引中心, 且后者有最大概率.*

注记 7.2.8　*这里还利用了下述简单事实, 即利用文献 [43] 第六章定理 24 的证明方法可以证明, 每一个弱几乎周期点 $x\in W(\Phi)$ 都是下述意义下的支撑点: 对每一 $\varepsilon>0$, 存在 Φ 的某个不变概率测度 m, 使得 $m(V(x,\varepsilon))>0$. 易于证明, Φ 的极小吸引中心包含全部支撑点, 即包含 $W(\Phi)$.*

最后指出, 文献 [43] 第五章构造了一个由环面微分方程给出的 C^1 流, 它的中心运动等于整个环面, 但是极小吸引中心由一个点构成, 这说明本章引进的弱几乎周期点集可以真包含于回复点集, 即两者是不同的概念.

附录 A　集合论和点集拓扑基础

集合论和点集拓扑是学习动力系统的基础学科之一, 也是阅读本书的不可缺少的基础. 读者应该已经学过集合论初步和点集拓扑. 为了本书的封闭性, 我们附加这样一个附录, 目的是把本书所需要的有关基本知识扼要地重述一遍, 便于读者随时翻阅. 为了减少篇幅, 除对本书特别重要的概念, 我们大都采取叙而不证的策略, 读者可参阅有关文献, 例如 [52].

A.1　集合论基础

集合论是整个数学的基础, 在一般点集拓扑书中均有简要论述, 可供非专业人员学习和参考. 本附录只略加论述本书最需要的内容, 目的是满足本书的封闭性要求, 有兴趣的读者可参阅有关文献.

A.1.1　集合

集合是一个不可精确定义的概念, 一般是指具有某种性质的个体的总和. 我们说给定一个集合, 就是说任给一个个体, 我们可以判断这个个体在或者不在这个集合里面. 如实数集合、有理数集合等. 一般, 集合用大写字母表示, 如 U, V, X, Y 等. 集合中的个体称作 "点" 或 "元素", 用小写字母表示, 如 a, b, x, y 等. 点 x 在集合 X 中记为 $x \in X$. 一个集合 X 中的点全包含在另一个集合 Y 中, 就说前者是后者的子集, 记为 $X \subset Y$. 如用 $\mathbb{R}$ 表示全体实数的集合, 用 $\mathbb{Q}$ 表示全体有理数的集合, 我们有 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

A.1.2　集合的运算

给定两个集合 U, V. 这两个集合的所有点一起构成一个新的集合, 称作它们的并或和, 记作

$$U \cup V.$$

它们的公共点也构成一个新集合, 称作它们的交或交集, 记作

$$U \cap V.$$

类似地, 可以定义任意多集合的并和交. 在 U 中而不在 V 中的点所构成的新集合, 称作两者的差, 记作

$$U - V.$$

如果 $U \subset X$, 称 $X - U$ 为 U(相对于 X) 的补集. 不含任何点的集合称作空集, 记为 $\varnothing$.

下述集合运算的基本性质易由定义直接推出:

交换律

$$U \cup V = V \cup U,$$

$$U \cap V = V \cap U;$$

结合律

$$(U \cup V) \cup W = U \cup (V \cup W),$$

$$(U \cap V) \cap W = U \cap (V \cap W);$$

分配律

$$(U \cup V) \cap W = (U \cap W) \cup (V \cap W),$$

$$(U \cap V) \cup W = (U \cup W) \cap (V \cup W);$$

De Morgan 律

$$A - (V \cup W) = (A - V) \cap (A - W),$$

$$A - (V \cap W) = (A - V) \cup (A - W).$$

上述诸性质亦可向多个甚至无穷多个集合情形推广.

A.1.3　对应和集合的基数

给定两个集合 X, Y. 如果存在一种规律 f, 使得对 X 中的每一点唯一存在 Y 中的点与之对应, 就称这个规律是 X 到 Y 的一个单值对应, 记作

$$f : X \to Y.$$

如果 $x \in X, f(x) = y$, 称 y 是 x 的像点, x 称为 y 的一个原像点. 如果 Y 中每一点的原像点都是唯一的, 就称 f 是单的. 如果 Y 中每一点都是 X 中某一点的像点, 就称 f 是满的或在上的. 若 $X_0 \subset X, X_0$ 的全体像点的集合称为 X_0 的像集, 记作 $f(X_0) \subset Y$. 若 $Y_0 \subset Y$, 称 X 中所有 Y_0 中点的原像点的集合为 Y_0 的原像集, 记为

$$f^{-1}(Y_0) \subset X.$$

一个既单又满的对应称为一一对应. 一一对应在集合之间建立一种关系, 记作 $\sim$. 这是一种等价关系, 即满足

(1) $X \sim X$ (反身性);

(2) $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$ (对称性);

(3) $X \sim Y, Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$ (传递性).

因此 $\sim$ 把集合分成等价类, 同一类集合彼此之间存在一一对应, 不同类集合之间不存在一一对应. 每一类集合赋予一个称作“基数”或“势”的概念: 相同类集合有相同的基数, 不同类集合基数不同. 有限集合的基数就是它包含点的个数. 因此基数就是“点的个数”的推广. 有限集合的基数有大、小之区别. 一般集合的基数也有广义大、小的区别.

给定两个集合 X, Y. 如果存在从 X 到 Y 的单的对应, 我们就说, X 的基数不大于 Y 的基数. 用 $C(X), C(Y)$ 表示集合 X, Y 的基数, 并用

$$C(X) \preceq C(Y)$$

表示 X 的基数不大于 Y 的基数. 如果从 X 到 Y 有一个单对应, 反过来, 从 Y 到 X 也有一个单对应, 即

$$C(X) \preceq C(Y), \quad C(Y) \preceq C(X),$$

我们就说, 它们有相同的基数, 记作 $C(X) = C(Y)$. 下述定理说明这种说法的合理性.

定理 A.1.1 *如果从 X 到 Y 有一个单对应, 反过来, 从 Y 到 X 也有一个单对应, 则 $X \sim Y$, 即它们之间存在一一对应.*

这就是著名的 Cantor-Bernstein 定理, 证明可参见文献 [52].

有限集合的基数可以比较大小. 下述两个定理说明一般集合的基数也可以比较大小, 而且基数无上限.

定理 A.1.2 *设 X, Y 为任意两个集合, 则*

$$C(X) \preceq C(Y), \quad C(Y) \preceq C(X)$$

两者至少一个成立.

设 X 是任意集合. 用 2^X 表示 X 的所有非空子集的集合.

定理 A.1.3 $C(X) \prec C(2^X)$.

证明参见文献 [52].

最“小”的无限集合是可数集或可列集, 其代表集合是有理数集 $\mathbb{Q}$, 其基数一般记为 $\aleph_0$. 如果承认连续统假设, 其次的无限集是实数集合代表的集类, 其基数记为 $\aleph$, 包括著名的 Cantor 集等. 在实变函数中已证明, 后者的基数大于前者的基数. 基数严格大于可数集的基数的集合可统称不可数集. 在动力系统中的所谓混沌集一般都是不可数的. 从集合论角度, 不可数集合其规模较大.

A.1.4 序结构, Zorn 引理

序是基础数学的一个重要概念, 集合的拓扑结构、代数结构和序结构是数学的基本结构, 序结构在本书中虽然应用不多, 但在紧致系统的极小集以及测度中心的

存在性的证明中还是用到了, 下面简单介绍一些序的基本概念对读者深入理解动力系统的本质也是大有好处的.

自然数有一个好的性质, 就是它的任何非空子集合都有最小元. 但并非所有集合都有这样的性质. 例如, 复数集合一般就没有这样的性质.

设 X 是一个非空集合. 在 X 的元素之间引进关系 $\leqslant$, 如果 X 中任何两个元素 x, y 都有关系 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$, 并且满足下述性质:

(1) $x \leqslant x, \forall x \in X$ (反身性);

(2) $x \leqslant y, y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z, \forall x, y, z \in X$ (传递性);

(3) $x \leqslant y,\ y \leqslant x \Rightarrow x = y$ (反对称性).

我们就说 $\leqslant$ 是 X 上的一个全序, 全序集合用 $(X, \leqslant)$ 表示.

如果不是对所有 X 中元素都有 $x \leqslant y$ 就说 $\leqslant$ 是 X 上的一个偏序, 偏序集合用 $(X, \preceq)$ 表示. 例如, 对包含关系 $\subset, X$ 就是一个偏序集合. 整数集合对 $\leqslant$ 则是全序集合.

设 $(X, \leqslant)$ 是一个全序集合. 如果 X 的一个子集 A 的任何非空子集都有最小元 x, 即 $x \leqslant y, \forall y \in X$, 我们就说 A 是一个良序. 一个集合 X 对包含关系 $\subset$ 构成一个偏序集合 $(X, \subset)$. X 的一个子集族 $X_0 \subset X$ 称为线性的或一个链, 如果对 $\forall A, B \in X_0, A \subset B$ 或 $B \subset A$. 在序、极大 (小) 原理、选择公理等之间存在一个等价链, 本书不作详细讨论. 下面是本书应用到的其中的一个 (Zorn 引理):

定理 A.1.4[32] *如果在偏序集 $(X, \subset)$ 中的每一个链 X_0 都有最小元素, 则 X 有最小元素, 即*

$$\text{存在 } E \subset X, \text{ 使得 } E \subset F, \forall F \subset X.$$

A.2 点集拓扑基础

A.2.1 拓扑空间

设 $\mathcal{X}$ 是一个非空集合, $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{X}$ 的子集合族, 满足如下性质:

(1) $\mathcal{X}, \varnothing \in \mathcal{T}$;

(2) $\forall \alpha \in \Gamma,\ A_\alpha \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \in \mathcal{T}$, 即对任意并的封闭性;

(3) $A_i \in \mathcal{T},\ i = 1, 2, \cdots, m(m > 0) \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{m} A_i \in \mathcal{T}$, 即对有限交的封闭性.

子集合族 $\mathcal{T}$ 称作 $\mathcal{X}$ 的一个拓扑, $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ 一起称作拓扑空间, 即一个非空集合赋予一个拓扑构成一个拓扑空间, 有时简单写作拓扑空间 $\mathcal{X}$. $\mathcal{T}$ 中的元素称作该拓扑空间的开集, 开集的补集称作闭集.

设 $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$. 易证集合族

$$\mathcal{T}_0 = \{\mathcal{X}_0 \cap A : A \in \mathcal{T}\},$$

即 $\mathcal{T}$ 中每一元素与 $\mathcal{X}_0$ 相交所构成的集合族, 是 $\mathcal{X}_0$ 上的一个拓扑, $(\mathcal{X}_0, \mathcal{T}_0)$ 叫做 $\mathcal{X}$ 的子空间.

子集合族 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ 称作 $\mathcal{T}$ 的或拓扑空间 $\mathcal{X}$ 的一组基, 如果 $\mathcal{T}$ 中每一个元素可以写成 $\mathcal{B}$ 中元素的并, 即对 $\forall A \in \mathcal{T}$, 都有

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

满足一定条件的子集合族可以唯一决定一个拓扑以它为基[52]. 所以, 为了定义拓扑, 有时先决定一组基.

如果一个拓扑空间有一个基数可数的基, 称作满足第二可数性公设空间.

A.2.2 度量空间

设 $\mathcal{X}$ 是一个非空集合. 记

$$\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

为 $\mathcal{X}$ 上一个非负二元函数, 如果满足:

(1) $x, y \in \mathcal{X}$, 则 $\rho(x,y) \geqslant 0; \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$(非负性);

(2) $x, y \in \mathcal{X} \Rightarrow \rho(x,y) = \rho(y,x)$(对称性);

(3) $x, y, z \in \mathcal{X} \Rightarrow \rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$(三角不等式).

则称 ρ 是 $\mathcal{X}$ 上的一个度量. 显然, 对一个给定集合, 拓扑和度量都不是唯一的.

一个非空集合 $\mathcal{X}$ 加上其上一个度量 ρ, 称作度量空间, 记作 $(\mathcal{X}, \rho)$. 当我们说 $\mathcal{X}$ 是一个度量空间, 就是说其上一个度量已经给定.

在集合 $\mathcal{X}$ 上定义度量 ρ 之后, 就可以定义球形邻域:

$$V(x, \varepsilon) = \{y \in \mathcal{X} : \rho(y, x) < \varepsilon\}.$$

最常见的拓扑空间和度量空间是欧氏空间

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, n, n > 0\}.$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上通常度量定义为

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

对这个度量而言, 球形邻域即是通常的开球. 当然, 如果度量变了, 球形邻域的形状也跟着改变.

设 $\mathcal{X}$ 是一个度量空间, 容易证明, 以 $\mathcal{X}$ 中每一点的所有正半径的球形邻域, 即

$$\mathcal{B} = \{B(x,r), \forall x \in \mathcal{X}, \forall r > 0\}$$

作为空间的子集合族构成的基, 可以得到 $\mathcal{X}$ 的一个拓扑, 由这个拓扑得到的拓扑空间, 称作由该度量所决定的拓扑空间. 所以度量空间也是拓扑空间. 反过来, 一个拓扑空间是否可以由一个度量决定, 这是一个复杂问题, 叫做拓扑空间的度量化问题, 超出本附录的范围, 我们不作讨论. 给定一个集合, 其上不同的度量可以决定同一个拓扑空间, 这样的度量称作等价度量. 这是读者应该注意的问题, 因为 Hausdorff 维数与测度的定义依赖度量, 也就是它们不是等价度量不变的.

一个度量空间 $(\mathcal{X}, \rho)$ 称作完备的, 如果其上任意 Cauchy 序列收敛到其上一点. 序列 $\{x_i\}$ 称作 Cauchy 序列, 如果对 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $i, j > N$, 有

$$\rho(x_i, x_j) < \varepsilon.$$

$\mathbb{R}^n (n > 0)$ 是完备的.

定理 A.2.1　*设 $(\mathcal{X}, \rho)$ 是完备度量空间. 如果紧致集合序列 $\{E_i, i > 0\}$ 满足*

$$E_i \neq \varnothing, \quad \forall i > 0, \quad E_i \supseteq E_j, i < j,$$

则

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \neq \varnothing.$$

证明从略.

设 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 是拓扑空间之间的单值对应. 我们说 f 在 $x \in \mathcal{X}$ 是连续的, 如果对 $f(x)$ 的任意邻域 $U_{f(x)}$, 存在 x 的邻域 U_x, 使得 $f(U_x) \subset U_{f(x)}$. f 在每一点都连续时, 称其为 $\mathcal{X}$ 上的连续映射.

当 $\mathcal{X}$ 是度量空间时, 称函数 $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 是一致上半连续的, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意 $x \in \mathcal{X}$, 都有

$$\rho(y, x) < \delta \Rightarrow f(y) < f(x) + \varepsilon.$$

同样可以定义一致下半连续函数. 当同时是一致上半连续和一致下半连续时, 称 f 是一致连续的. 当我们讨论 Hausdorff 测度的连续性时, 需要下述定理.

定理 A.2.2　*一致上 (下) 半连续等价一致连续.*

证明从略.

设 X 是一个拓扑空间. 下面引进几个名词.

设子集合 $X_0 \subset X$. 称 X_0 在 X 中稠密, 如果 $\overline{X_0} = X$; 称 X_0 在 X 中无处稠密或疏子集, 如果 X_0 的闭包的内集是空集; X_0 称为第一纲集, 如果它是可数个无处稠密子集的并. 不是第一纲集的集称为第二纲集;

在完备度量空间中, 包含一个可数个稠密开集的交集的集称作 Baire 剩余集. Baire 剩余集是稠密的.

稠密子集的补集也可以是稠密的. 例如, 在直线上, 有理数的集合是稠密的, 其补集即无理数的集合也是稠密的. 但 Baire 剩余集的补集不再是稠密的. 我们可以称无处稠密子集、第一纲集等为拓扑 "小集合".

A.3 紧 致 性

设 $\mathcal{X}$ 是一个拓扑空间. 子集合族 $\{U_\alpha, \alpha\in\Gamma\}$ 称作 $\mathcal{X}$ 的一个覆盖, 如果 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha = \mathcal{X}$. 当其中元素都是开集时, 称作开覆盖. 拓扑空间 $\mathcal{X}$ 称作紧致的, 如果它的每一个开覆盖都有有限的子覆盖. 空间的一个子集是紧致的, 如果它作为子空间是紧致的. 一般分形, 特别是自相似集大都是紧致的. 例如, 有界闭线段是紧致的, 这是数学分析中一个著名定理. 一般地, $\mathbb{R}^n(n > 0)$ 中有界闭子集是紧致的. 但并非任意度量空间中有界闭子集都是紧致的. 紧致性是拓扑空间乃至整个分析数学最重要的概念之一.

本书用到 Lebesgue 数概念, 简介如下.

定义 A.3.1 (Lebesgue 数) *设 $(\mathcal{X},\rho)$ 是一个度量空间, α 是它的一个开覆盖. 实数 $\lambda > 0$ 称作 α 的一个 Lebesgue 数, 如果 $A \subset \mathcal{X}, |A| < \lambda \Rightarrow$ 存在 α 中元素包含 A. 这个 λ 称作 α 的 Lebesgue 数.*

不是任何度量空间的任何开覆盖都存在 Lebesgue 数, 但有

定理 A.3.2 *紧致度量空间的每一个开覆盖都有 Lebesgue 数.*

几乎在任何一本点集拓扑的书中都可以找到它的证明. 这里不去证明它.

关于紧致性概念本书用的不是很多, 我们就介绍到这里为止.

A.4 连 通 性

设 $\mathcal{X}$ 是一个拓扑空间. 两个子集 A, B 叫做隔离的, 如果

$$A \cap \overline{B} = \varnothing; \quad B \cap \overline{A} = \varnothing.$$

拓扑空间叫做不连通的, 如果它可以写成两个非空隔离子集的并. 不是不连通的拓扑空间叫做连通空间. 空间的子集叫做连通的, 如果作为子空间是连通的.

$\mathbb{R}^n(n > 0)$ 是连通的. $[a,b]$ $(a < b)$ 作为 $\mathbb{R}$ 的子集是连通的. Sierpinski 垫片和 Koch 曲线都是连通的, 但 Sierpinski 地毯一般都是不连通的. $[a,b] \cup [c,d]$ $(a < b < c < d)$ 是 $\mathbb{R}$ 的非连通子集. 拓扑空间每一个点作为子空间是连通的. 拓扑

空间 $\mathcal{X}$ 中两点 x, y 叫做连通的, 如果 $\mathcal{X}$ 有一个连通子集同时包含这两点. 在 $\mathcal{X}$ 上的点间建立关系 $\sim$:

(1) $x \sim x$(反身性);

(2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$(对称性);

(3) $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (传递性).

(1) 和 (2) 是明显的, (3) 亦不难验证. 因此, 这是一个等价关系, 从而把 $\mathcal{X}$ 的点分成不相交的类, 同一类中的点彼此连通, 不同类不相交. 每一个这样的类称作空间的一个连通分支. 容易证明, 连通分支作为子集是连通的, 且每一个连通分支都是闭集. 每一个连通分支只包含一个点的空间称作全不连通空间. Cantor 集是全不连通的.

一个点 $x \in \mathcal{X}$ 叫做局部连通的, 如果 x 的每一个邻域都包含一个连通邻域. 每一点都局部连通的空间叫做局部连通空间. 连通和局部连通是不同的概念, 两者无蕴涵关系, 即连通不一定局部连通, 反之亦然. 局部连通但非连通的例子容易构造, 连通但非局部连通的例子略显复杂[52].

设 $x, y \in \mathcal{X}$. 从 x 到 y 一条路径, 是指如下一个连续映射:

$$\begin{cases} f : [0,1] \to \mathcal{X}, \\ f(0) = x, \\ f(1) = y. \end{cases}$$

如果存在这样的一条路径, 我们就说 x 和 y 是路径连通的. 一个拓扑空间叫做路径连通的, 如果其中每两点都是路径连通的. 容易证明 Sierpinski 垫片是路径连通的. 路径连通蕴涵连通, 反之不真[52].

在拓扑空间 $\mathcal{X}$ 的点间建立关系 $\sim$: $x \sim y \Leftrightarrow x$ 与 y 路径连通. 容易证明

(1) $x \sim x$ (反身性);

(2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (对称性);

(3) $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (传递性).

(1) 是明显的, (2) 的证明也简单. (3) 的证明如下[52]:

设从 x 到 y 和从 y 到 z 的两条路径分别是

$$\begin{cases} f_1 : [0,1] \to \mathcal{X}, \\ f_1(0) = x, \\ f_1(1) = y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2 : [0,1] \to \mathcal{X}, \\ f_2(0) = y, \\ f_2(1) = z. \end{cases}$$

定义从 x 到 z 的路径为

$$\begin{cases} f:[0,1]\to\mathcal{X}, \\ f(t)=f_1(2t), t\in[0,1/2], \\ f(t)=f_2(2t-1), t\in[1/2,1]. \end{cases}$$

类似连通分支的情形, 也可以定义路径连通分支.

附录 B　测度论与遍历论基础

本书后半部的讨论很大程度上依赖遍历理论, 但遍历理论内容极其丰富, 即使要把本书需要的主要结论, 例如紧致系统总是存在不变测度等, 阐述透彻也需要大量篇幅, 为了本书的封闭性, 又不占有太多篇幅, 本附录的目的是尽量将本书所需要的内容的来龙去脉交代清楚, 而有些则略去证明, 使得要读懂本书尽够了, 至于要深入理解其真谛, 则必须认真去读文献 [18], [50]. 本附录即取材该书. 本附录可以认为是初学者阅读该文献的一个详细提纲.

B.1　测度空间和测度

B.1.1　测度空间

设 X 是一个非空集合. X 的一个 σ 代数是指其上一个非空子集合族 $\mathscr{B}$, 满足:

(1) $X \in \mathscr{B}$;

(2) $B \in \mathscr{B} \Rightarrow X - B \in \mathscr{B}$;

(3) $B_n \in \mathscr{B}, \forall n > 0 \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{B}$.

易于看出, σ 代数是 X 的一个子集族, 包含 $\{X, \varnothing\}$ 并满足对补运算、可数交和可数并运算的封闭性. $(X, \mathscr{B})$ 一起称作一个可测空间.

$(X, \mathscr{B})$ 上一个有限测度是指 σ 代数上的一个非负函数: $m : \mathscr{B} \to \mathbb{R}^+$, 满足条件:

(1) $m(\varnothing) = 0$;

(2) 可数可加性, 即

$$A_n \in \mathscr{B}, n > 0, A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i \neq j \Rightarrow m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

这时称 $(X, \mathscr{B}, m)$ 为测度空间. 称 $\mathscr{B}$ 的成员为 m 可测集. 如果 $M(X) = 1$, 称 m 为概率测度, $(X, \mathscr{B}, m)$ 为概率空间.

设 $(X_1, \mathscr{B}_1, m_1)$, $(X_2, \mathscr{B}_2, m_2)$ 为两个概率空间.

(a) 称映射 $T : X_1 \to X_2$ 是可测的, 如果 $T^{-1}(\mathscr{B}_2) \subset \mathscr{B}_1$, 即 $B \in \mathscr{B}_2 \Rightarrow T^{-1}(B) \in \mathscr{B}_1$.

(b) 称 $T: X_1 \to X_2$ 是保测的, 如果 T 是可测的且 $m_1(T^{-1}(B)) = m_2(B), \forall B \in \mathscr{B}_2$.

(c) 称 $T: X_1 \to X_2$ 是可逆保测的, 如果 T 保测, 一对一且 T^{-1} 也是保测的.

我们更多的是讨论自映射, 即 $T: (X, \mathscr{B}, m) \to (X, \mathscr{B}, m)$ 或简单地 $T: X \to X$. 这时, 如果 T 是保测的, 称 m 是它的不变测度.

(d) 自映射 T 的一个不变测度 m 叫做遍历的, 如果 $B \in \mathscr{B}$, 则 $T^{-1}(B) = B \Rightarrow m(B) = 1$ 或 $m(B) = 0$.

遍历性是一个重要概念, 其意义是 X 不能分解成两个都有正测度的不变子集的并.

注记 B.1.1 (1) 给定 $(X, \mathscr{B}, m)$, 如何判断一个子集是可测的是一个重要问题. 一般只能按定义去判断, 有时是一件很麻烦的事.

(2) 可以证明, 给定 X, 其上 σ 代数的任意并, 即它们的所有元素构成的集合族, 也是 σ 代数. 容易证明, 2^X 是 σ 代数. 由此易见, 任意给定一个非空子集合族, 可以唯一生成一个最小的 σ 代数, 包含其中每一个元素为其可测集.

如何选择 σ 代数视情况而定. 当 X 是拓扑空间时, 通常选取由开集族生成的 σ 代数, 称它为 Borel σ 代数.

(3) 给定 $m: \mathscr{B} \to \mathbb{R}^+$, 如何判断它是否为测度不是一件容易的事情, 其深入讨论见文献 [50].

本小节最后证明遍历理论的一个基本结果[50].

定理 B.1.2 (Poincaré 回复定理) 设 $(X, \mathscr{B}, m)$ 是概率空间, $f: X \to X$ 为保测映射, 且 $E \in \mathscr{B}, m(E) > 0$. 则 E 中几乎所有的点在 f 迭代作用下无限次回到 E 中, 即存在可测子集 $F \subset E, m(F) = m(E)$, 对每一 $x \in F$, 存在 $n_1 < n_2 < \cdots$, 使得 $f^{n_i}(x) \in E, \forall i > 0$.

证明 对 $N \geqslant 0$, 设 $E_N = \bigcup\limits_{n=N}^{\infty} f^{-n}(E)$. 易见, 集合 $\bigcap\limits_{N=0}^{\infty} E_N$ 每一点在 f 的正向迭代作用下无限次回到 E 中. 因此集合 $F = E \cap \bigcap\limits_{N=0}^{\infty} E_N$ 是由在 f 正向迭代作用无限次回到 E 中的点构成. 如果 $x \in F$, 那么存在整数序列 $0 < n_1 < n_2 < \cdots$, 使得 $f^{n_i}(x) \in E, \forall i > 0$. 对每一个 $i > 0$, 我们有 $f^{n_i}(x) \in F$, 因为 $f^{n_j - n_i}(f^{n_i}(x)) \in E, \forall j > 0$.

下面证明 $m(F) = m(E)$. 因为 $f^{-1}(E_N) = E_{N+1}$, 有 $m(E_N) = m(E_{N+1})$, 因此 $m(E_0) = m(E_N), \forall N > 0$. 因为 $E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots$, 显然 $m\left(\bigcap\limits_{N=0}^{\infty} E_N\right) = m(E_0)$, 所以 $m(F) = m(E \cap E_0) = m(F)$, 因为 $E \subset E_0$. □

B.1.2　积分和函数空间

下面的内容取材于文献 [50]. 记 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 是直线 $\mathbb{R}$ 上由全体开集或全体开区间或全体形如 $(c,\infty)(c\in\mathbb{R})$ 的开区间生成的 σ 代数, 它们都是等价的. 设 $(X,\mathscr{B},m)$ 是一个测度空间. 一个函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 叫做可测的, 如果 $f^{-1}(D)\in\mathscr{B},\forall D\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$, 或等价地 $f^{-1}((c,\infty))\in\mathscr{B},\forall c\in\mathbb{R}$. 函数 $f:X\to\mathbb{C}$ 是可测的, 如果其实部和虚部都是可测的, 其中 $\mathbb{C}$ 是复平面. 当 X 是拓扑空间, 而 $\mathscr{B}(X)$ 为 Borel σ 代数时, 易见, 任意连续函数 $f:X\to\mathbb{C}$ 是可测的. 我们说两个函数 $f=g$ a.e, 如果 $m\{x:f(x)\neq g(x)\}=0$.

设 $(X,\mathscr{B}(X),m)$ 满足: $m(U)\neq 0$, 其中 U 是任意非空开集, 则连续函数 $f,g:X\to\mathbb{R},f=g$ a.e $\Rightarrow f=g$, 因为使它们不相等的点构成 m 零测度开集, 即空集.

设 $(X,\mathscr{B},m)$ 是一个概率空间. 一个函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 叫做简单的, 如果它能写成

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i},$$

其中 $A_i\in\mathscr{B},A_i\cap A_j=\varnothing,i\neq j$, 而 χ_{A_i} 是 A_i 的特征函数, $n>0$. 显然, 简单函数可测, 定义其积分为

$$\int f dm=\sum_{i=1}^{n}a_i m(A_i).$$

这个定义与简单函数的表示 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}$ 无关.

设 $f:X\to\mathbb{R}$ 可测且 $f\geqslant 0$. 存在递升简单函数序列 $\{f_n\}$ 收敛于 f. 例如, 可取

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{i-1}{2^n}, & \text{如果 } \dfrac{i-1}{2^n}\leqslant f(x)<\dfrac{i}{2^n}, i=1,\cdots,n\cdot 2^n,\\ n, & \text{如果 } f(x)\geqslant n.\end{cases}$$

定义

$$\int f dm=\lim_{n\to\infty}\int f_n dm,$$

这个定义与 $\{f_n\}$ 选取无关. 我们说 f 可积, 如果 $\int f dm<\infty$.

设 $f:X\to\mathbb{R}$ 可测, 则可写成 $f=f^+-f^-$, 其中

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\}\geqslant 0,\quad f^-(x)=\max\{-f(x),0\}\geqslant 0.$$

我们说 f 可积, 如果 f^+,f^- 可积, 且定义

$$\int f dm=\int f^+ dm-\int f^- dm.$$

我们说 $f: X \to \mathbb{C}, f = f_1 + if_2$ 可积, 如果 f_1, f_2 可积, 且定义

$$\int f dm = \int f_1 dm + i \int f_2 dm.$$

定义 $|f|$ 如下

$$|f|(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果 } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{如果 } f(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

易见 f 可测蕴涵 $|f|$ 可测, 且 f 可积当且仅当 $|f|$ 可积. 如果 $f = g$ a.e, 则其中一个可积另一个也可积, 且 $\int f dm = \int g dm$.

记 $(X, \mathscr{B}, m)$ 上全体可积函数 $f: X \to \mathbb{C}$ 的空间为 $L^1(X, \mathscr{B}, m)$ 或 $L^1(m)$. 两个这样的函数积分相等, 如果它们 a.e 相等. 定义模 $\|f\|_1 = \int |f| dm$, 则 $(X, \mathscr{B}, m)$ 构成 Banach 空间.

设 $(X, \mathscr{B}, m)$ 是一个测度空间, $p \in \mathbb{R}, p \geqslant 1$. 考虑所有对 $|f|^p$ 可积函数 $f: X \to \mathbb{C}$ 的集合, 在函数通常加法和数乘运算下, 这是一个向量空间, 在其上建立等价关系: $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ a.e, 其等价类亦构成向量空间, 这个向量空间记作 $L^p(X, \mathscr{B}, m)$. 在 $L^p(X, \mathscr{B}, m)$ 上定义模: $\|f\|_p = \left(\int |f|^p dm\right)^{1/p}$, 可以证明, 这个模是完备的, 因此 $L^p(X, \mathscr{B}, m)$ 是 Banach 空间, 其中有界可积函数是稠密的. 用 $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathscr{B}, m)$ 表示由实函数构成的 Banach 空间. 由内积定义模的 Banach 空间叫做 Hilbert 空间. $L^p(X, \mathscr{B}, m)$ 是 Hilbert 空间当且仅当 $p = 2$.

下面引进两个有用的概念. 设 $(X, \mathscr{B})$ 是可测系统, μ, m 是两个概率测度. 我们说 μ 关于 m 是绝对连续的, 记作 $\mu \ll m$, 如果 $m(B) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0, B \in \mathscr{B}$. 说它们等价, 如果 $\mu \ll m, m \ll \mu$. 有

定理 B.1.3 (Radon-Nikodym 定理)[50] *假设同上. 则 $\mu \ll m$ 当且仅当存在*

$$f \in L^1(m), f \geqslant 0, \int f dm = 1, \text{使得 } \mu(B) = \int_B f dm, \forall B \in \mathscr{B}.$$

f 在几乎处处相等意义下是唯一的. 函数 f 称作 μ 关于 m 的 Radon-Nikodym 导数, 记作 $d\mu \setminus dm$.

另外, 相反的概念是奇异的概念. 称 μ, m 互相奇异, 记作 $\mu \perp m$, 如果存在 $B \in \mathscr{B}, \mu(B) = 0, m(X \setminus B) = 0$. 我们有下述分解定理.

定理 B.1.4 (Lebesgue 分解定理)[50] *设 μ, m 同上. 存在 $p \in [0,1]$ 和概率测度 μ_1, μ_2, 使得 $\mu = p\mu_1 + (1-p)\mu_2, \mu_1 \ll m, \mu_2 \perp m$, 且 p, μ_1, μ_2 是唯一决定的.*

定理 B.1.5 (Birkhoff 定理) *设 $T: (X, \mathscr{B}, m) \to (X, \mathscr{B}, m)$ 是保测映射且 $f \in L^1(X)$. 则*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) \to \text{a.e} f^\star \in L^1(m), f^\star \circ T = f^\star \text{a.e},$$

且 $m(X) < \infty \Rightarrow \int f^\star dm = \int f dm.$

注记 B.1.6 如果 T 是遍历的, 则 $f^\star$ 几乎是常数, 所以, 如果 $m(X) < \infty$, 则

$$f^\star = \frac{1}{m(X)} \int f dm \ \text{ a.e.}$$

如果 $(X, \mathscr{B}(X), m)$ 是概率空间且 T 是遍历的, 则

$$\forall f \in L^1(m), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = \int f dm \ \text{ a.e.}$$

如果 $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$ 存在, 则称其为 $f \in L^1(m)$ 在 x 点的时间平均, 而称 $\int_X f dm$ 为 f 的相或者空间平均. 上述定理是说, 当 T 是遍历的, 则两者相等.

这个定理是遍历理论最基本的结果, 证明见文献 [50].

B.2 测度理论熵

下面恒设 $(X, \mathscr{B}, m)$ 是概率空间. X 或 $(X, \mathscr{B}, m)$ 的一个分解是指两两不相交的可测集合族, 其并是 X. 一个有限分解是这样的有限集合族. 一个有限分解用希腊字母表示, 例如 $\xi = \{A_1, A_2, \cdots, A_k, k > 0\}$. $\mathscr{B}$ 中所有可以写成 ξ 中元素的并的元素构成 $\mathscr{B}$ 的一个有限 σ 子代数, 记作 $\mathscr{A}(\xi)$. 反过来, $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个有限 σ 子代数, 记作 $\mathscr{C} = \{C_i, i = 1, 2, \cdots, n, n > 0\}$, 则形如 $B_1 \cap \cdots \cap B_n$ 的非空集合, 其中 $B_i = C_i$ 或 $X - C_i$, 构成 X 的一个有限分解, 记作 $\xi(\mathscr{C})$. 易见 $\mathscr{A}(\xi(\mathscr{C})) = \mathscr{C}, \xi(\mathscr{A}(\eta)) = \eta$. 所以在有限分解和有限 σ 子代数之间有一个一一对应.

记 $\xi \leqslant \eta$, 如果前者的每一个元素都是后者元素的并, 称后者是前者的一个加细. 易证 $\xi \leqslant \eta \Leftrightarrow \mathscr{A}(\xi) \subset \mathscr{A}(\eta), \mathscr{A} \subset \mathscr{C} \Leftrightarrow \xi(\mathscr{A}) \leqslant \xi(\mathscr{C})$.

设 $\xi = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}, \eta = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ 是两个有限分解. 记有限分解

$$\xi \vee \eta = \{A_i \cap C_j : 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant k\}.$$

如果 $\mathscr{A}, \mathscr{C}$ 是 $\mathscr{B}$ 的两个有限 σ 子代数, 用 $\mathscr{A} \bigvee \mathscr{C}$ 表示包含 $\mathscr{A}, \mathscr{C}$ 的最小的 $\mathscr{B}$ 的 σ 子代数.

下面设 $f : X \to X$ 是保测映射. 如果 $\xi = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$, 用 $f^{-n}\xi$ 表示 $\{f^{-n}(A_1), \cdots, f^{-n}(A_k)\}$, 而 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的 σ 子代数, 用 f^{-n} 表示 σ 子代数 $\{f^{-n}(A) : A \in \mathscr{A}\}(n \geqslant 0)$. 因为 f^{-n} 保持上述运算, 因而有

(1) $\xi(f^{-n}(\mathscr{A})) = f^{-n}(\xi(\mathscr{A}))$;

(2) $\mathscr{A}(f^{-n}(\xi)) = f^{-n}(\mathscr{A}(\xi))$;

(3) $f^{-n}(\mathscr{A} \vee \mathscr{C}) = f^{-n}(\mathscr{A}) \vee f^{-n}(\mathscr{C})$;

(4) $f^{-n}(\xi \vee \eta) = f^{-n}(\xi) \vee f^{-n}(\eta)$, $\xi \leqslant \eta \Rightarrow f^{-n}(\xi) \leqslant f^{-n}(\eta)$;

(5) $\mathscr{A} \subset \mathscr{C} \Rightarrow f^{-n}(\mathscr{A}) \subset f^{-n}(\mathscr{C})$.

定义 B.2.1 设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的有限 σ 子代数, $\xi(\mathscr{A}) = \{A_1, \cdots, A_k\}$, 则 $\mathscr{A}$ 或 $\xi(\mathscr{A})$ 的熵定义为

$$H(\mathscr{A}) = H(\xi(\mathscr{A})) = -\sum_{i=1}^{k} m(A_i) \log m(A_i) \quad (\text{约定: } 0 \cdot \log 0 = 0).$$

易见

(1) $H(\mathscr{A}) \geqslant 0$;

(2) 如果 $\mathscr{A} = \{X, \varnothing\}$, 则 $H(\mathscr{A}) = 0$;

(3) 如果 $\xi(\mathscr{A}) = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$, $m(A_i) = \dfrac{1}{k}, i = 1, 2, \cdots, k$, 则

$$H(\mathscr{A}) = -\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} \log \frac{1}{k} = \log k;$$

(4) 设 $f: X \to X$ 为保测映射, 则 $H(f^{-1}(\mathscr{A})) = H(\mathscr{A})$;

(5) $H(\xi) \leqslant \log k$, 等号成立当且仅当 $m(A_i) = \dfrac{1}{k}, i = 1, 2, \cdots, k$.

其中 (5) 的证明需要一个辅助函数, 详见文献 [50].

下面设 $f: X \to X$ 为保测映射. 如果 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个有限 σ 子代数, 则

定义 B.2.2 [50]

$$h(f, \xi(\mathscr{A})) = h(f, \mathscr{A}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathscr{A})) \geqslant 0$$

叫做 f 关于 $\mathscr{A}$ 的相对熵, 相对熵总是存在的.

定义 B.2.3

$$h(f) = \sup h(f, \mathscr{A}) = \sup h(f, \xi)$$

叫做 f 的熵, 其中第一个等号是对所有 $\mathscr{B}$ 的有限 σ 子代数取上确界, 而第二个等号是对 X 的所有限分解取上确界.

B.2.1 紧致系统的不变测度

下面假设 (X, f) 是紧致系统, 并记 $\mathscr{B}(X)$ 为它的 Borel σ 代数, 这样, $(X, \mathscr{B}(X))$ 也是一个可测空间 (可假设为概率空间), $(X, \mathscr{B}(X), f)$ 同时是一个概率系统. 我们要回答的第一个问题是, 这样的系统存在不变测度吗? 下面扼要地介绍这方面的基本结果, 请读者参阅文献 [50].

用 $M(X)$ 表示 X 上或可测空间 $(X,\mathscr{B}(X))$ 上的全体概率测度的集合, 赋它以 ω^* 拓扑, 它构成一个有仿射结构的紧致可度量凸空间 (详细讨论在下面给出). 设 $m,\mu\in M(X)$, 定义

$$(pm+(1-p)\mu)(A)=pm(A)+(1-p)\mu(A),\quad \forall A\in\mathscr{B}, p\in[0,1], pm+(1-p)\mu\in M(X),$$

叫做 m 和 μ 的凸组合. 类似地, 可以定义 $M(X)$ 中多个元素的凸组合, 即

$$m_i\in M(X),\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1,\lambda_i\in[0,1],i=1,2,\cdots,k,k>1\Rightarrow\sum_{i=1}^{k}\lambda_i m_i\in M(X).$$

每一个点 $x\in X$ 决定 $M(X)$ 中一个成员 δ_x, 定义如下:

$$\delta_x(A)=\begin{cases}1, & \text{如果 } x\in A,\\ 0, & \text{如果 } x\notin A,\forall A\in\mathscr{B}(X).\end{cases}$$

所以映射 $x\mapsto\delta_x$ 把 X 嵌入 $M(X)$, 前者可以看作后者的子集. 此后称 $M(X)$ 中元素为 X 上的 Borel 概率测度, 并称 δ_x 为由点 x 决定的点测度或原子测度.

定义 B.2.4　一个 $m\in M(X)$ 叫做正则的, 如果 $\forall\varepsilon>0,\forall B\in\mathscr{B}(X)$, 存在开集 U_ε 和闭集 C_ε, 满足 $C_\varepsilon\subset B\subset U_\varepsilon$, 使得 $m(U_\varepsilon\setminus C_\varepsilon)<\varepsilon$.

定理 B.2.5　$M(X)$ 上 Borel 概率测度是正则的.

证明　用 $\mathscr{R}$ 表示满足正则条件的可测集的集合. 先证 $\mathscr{R}$ 是 $\mathscr{B}$ 的 σ 子代数. 显然 $X\in\mathscr{R}$. 设 $A\in\mathscr{R}$. 如果 $\varepsilon>0$, 存在开集和闭集

$$U_\varepsilon,C_\varepsilon,C_\varepsilon\subset A\subset U_\varepsilon,\quad \text{满足 } m(U_\varepsilon\setminus C_\varepsilon)<\varepsilon.$$

于是

$$X\setminus U_\varepsilon\subset X\setminus A\subset X\setminus C_\varepsilon \text{ 和 } (X\setminus C_\varepsilon)\setminus(X\setminus U_\varepsilon)=U_\varepsilon\setminus C_\varepsilon,$$

所以

$$m((X\setminus C_\varepsilon)\setminus(X\setminus U_\varepsilon))=m(U_\varepsilon\setminus C_\varepsilon)<\varepsilon,$$

即 $X\setminus A\in\mathscr{R}$.

下面证明, 在可数并运算下 $\mathscr{R}$ 封闭. 设 $A_1,A_2,\cdots\in\mathscr{R},A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i,\varepsilon>0$. 存在开集和闭集 $U_{\varepsilon,n},C_{\varepsilon,n}$, 满足 $C_{\varepsilon,n}\subset A_n\subset U_{\varepsilon,n}$, 使得 $m(U_{\varepsilon,n}\setminus C_{\varepsilon,n})<\dfrac{\varepsilon}{3^n},\forall n>0$. 设 $U_\varepsilon=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}U_{\varepsilon,n},\widetilde{C_\varepsilon}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}C_{\varepsilon,n}$. 选择 k 使得 $m\left(\widetilde{C_\varepsilon}\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{k}C_{\varepsilon,n}\right)<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 设闭集 $C_\varepsilon=\bigcup\limits_{n=1}^{k}C_{\varepsilon,n}$. 有 $C_\varepsilon\subset A\subset U_\varepsilon$ 和

$$\begin{aligned} m(U_\varepsilon - C_\varepsilon) &\leqslant m(U_\varepsilon \setminus \widetilde{C_\varepsilon}) + m(\widetilde{C_\varepsilon} \setminus C_\varepsilon) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(U_{\varepsilon,n} \setminus C_{\varepsilon,n}) + m(\widetilde{C_\varepsilon} \setminus C\varepsilon) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{3^n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

因此 $\mathscr{R}$ 是 σ 代数.

为完成定理的证明, 只需证明 $\mathscr{R}$ 包含全体闭子集即可. 设 C 是闭集合, $\varepsilon > 0$. 记开集 $U_n = \left\{x \in X : d(C,x) < \dfrac{1}{n}\right\}, U_1 \supset U_2 \supset \cdots$, 易见 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i = C$. 选择 k, 使得 $m(U_k \setminus C) < \varepsilon$, 并设 $C_\varepsilon = C, U_\varepsilon = U_k$. 这证明 $C \in \mathscr{R}$. □

下述推论明显.

推论 B.2.6 对每一个 $B \in \mathscr{B}(X)$,

$$m(B) = \sup_{C=\overline{C}, C \subset B} m(C), \quad m(B) = \inf_{U 开, U \supset B} m(U).$$

定理 B.2.7 设 $m, \mu \in \mathscr{B}(X)$, 则

$$\int_X f dm = \int_X f d\mu, \quad \forall f \in C(X) \Rightarrow m = \mu.$$

证明 据上述推论, 只需证明 $m(C) = \mu(C), \forall C \in \mathscr{B}(X), \overline{C} = C$ 即可. 设 $\overline{C} = C, \varepsilon > 0$, 据正则性, 存在开集 $U, C \subset U, m(U \setminus C) < \varepsilon$.

定义 $f : X \to X$, 使得

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 如果\ x \notin U, \\ \dfrac{d(x, X \setminus U)}{d(x, X \setminus U) + d(x, C)}, & 如果\ x \in U. \end{cases}$$

f 是确定的且连续, $f(x) = 0, \forall x \in X \setminus U, f(x) = 1, \forall x \in C, 0 \leqslant f(x) \leqslant 1, \forall x \in X$. 因此

$$\mu(C) \leqslant \int_X f d\mu = \int_X f dm \leqslant m(U) < m(C) + \varepsilon,$$

所以 $\mu(C) < m(C) + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$, 因此 $\mu(C) \leqslant m(C)$. 由对称性, 得 $m(C) \leqslant \mu(C)$, 即得 $m(C) = \mu(C)$. □

为了在 $M(X)$ 上定义拓扑, 我们需要下述定理.

定理 B.2.8 (Riesz 表示定理)[50] *设 $J : C(X) \to \mathbb{C}$ 是线性正规正定算子, 即 $f \geqslant 0 \Rightarrow J(f) \geqslant 0, J(1) = 1$, 则存在 $\mu \in M(X)$, 使得 $J(f) = \int_X f d\mu, \forall f \in C(X)$. 其中 $C(X)$ 是 X 上全体连续复函数的空间, 它是可分的, 即有可数稠密子集.*

证明见文献 [50] 及其引文.

所以映射 $\mu \mapsto J$ 是 $M(X)$ 和 $C(X)$ 上全体线性正规正定算子之间的一个一一对应, 用 J_μ 表示 μ 的像. 这个一一对应是仿射的, 即 $J_{p\mu+(1-p)m} = pJ_\mu + (1-p)J_m, \forall p \in [0,1]$. 因此 $M(X)$ 可以与 $C(X)^*$ 的单位球面等同, 其中 $C(X)^*$ 表 $C(X)$ 上全体线性算子构成的空间. 这允许我们从 $C(X)^*$ 的 ω^* 拓扑得到 $M(X)$ 上的 ω^* 拓扑, 而 $C(X)^*$ 的单位球面是紧致的, 故 $M(X)$ 亦是紧致的. 这个拓扑与 X 的等价度量选取无关. 这个拓扑是使映射 $\mu \mapsto \int_X f d\mu (f \in C(X))$ 连续的最小拓扑, 它的一组基是[50]

$$V_\mu(f_1, \cdots, f_k; \varepsilon) = \left\{ m \in M(X) : \left| \int_X f_i dm - \int_X f_i d\mu \right| < \varepsilon, \varepsilon > 0, \right.$$
$$\left. f_i \in C(X), 1 \leqslant i \leqslant k, k \geqslant 1 \right\}.$$

定理 B.2.9 在 ω^* 拓扑下, 空间 $M(X)$ 是可度量的. 不妨设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 在 $C(X)$ 中稠密, 则

$$D(m, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \int f_n dm - \int f_n d\mu \right|}{2^n \|f_n\|}$$

是 $M(X)$ 上 ω^* 拓扑的一个度量.

证明 易于验证 $D : M(X) \times M(X) \to \mathbb{R}$ 是一个度量. 对每一个 $i > 0$, 易证映射

$$\mu \mapsto \int f_i d\mu$$

在 $(M(X), D)$ 上是连续的, 因为 $\left| \int f_i dm - \int f_i d\mu \right| \leqslant 2^i \|f_i\| D(m, \mu)$. 因为 $\{f_i\}_i^\infty$ 在 $C(X)$ 内稠密, 所以对每一个

$$f \in C(X), \mu \mapsto \int f d\mu$$

在 $(M(X), D)$ 上是连续的. 所以 ω^* 拓扑的每一个开集, 在度量空间 $(M(X), D)$ 内也是开集. 为了证明反过来亦成立, 只需证明 $(M(X), D)$ 中每一个开球 $\{m \in M(X) : D(m, \mu) < \varepsilon\}$ 包含 ω^* 拓扑的基中的一个集合

$$V_\mu(g_1, \cdots, g_k; \delta), \quad k > 1, \quad g_i \in C(X), \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \delta > 0$$

即可. 如果 $\mu \in M(X), \varepsilon > 0$ 已给定, 选择 $N > 0$, 使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

设

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n\|f_n\|}\right)^{-1},$$

则

$$V_\mu(f_1,\cdots,f_N;\delta)\subset\{m\in M(X):D(m,\mu)<\varepsilon\}.$$

□

命题 B.2.10 (1) 在 ω^* 拓扑下, 在 $M(X)$ 内, $\mu_n\to\mu\Leftrightarrow\int fd\mu_n\to\int fd\mu,\forall f\in C(X)$.

(2) $x\mapsto\delta_x$ 是连续的.

(3) 如果 $\mu_n,\mu\in M(X)$, 则下述条件等价:

① 对 ω^* 拓扑, $\mu_n\to\mu$;

② 如果 $F\subset X$ 是闭集, 则 $\limsup\limits_{n\to\infty}\mu_n(F)\leqslant\mu(F)$;

③ 如果 $U\subset X$ 是开集, 则 $\liminf\limits_{n\to\infty}\mu_n(U)\geqslant\mu(U)$;

④ 若 $A\in\mathscr{B}(X),\mu(\partial(A))=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A)=\mu(A)$.

下面证明 Kryloff-Bogoliuboff 理论的基本结论, 即紧致系统 (X,f) 总是存在不变测度, 即存在 $m\in\mathscr{B}(X),m(f^{-1}(B))=m(B),\forall B\in\mathscr{B}(X)$.

因为 f 是可测的, 故 $f^{-1}(\mathscr{B}(X))\subset\mathscr{B}(X)$, 事实上 $f^{-1}(\mathscr{B}(X))=\mathscr{B}(X)$, 因为 $f^{-1}(\mathscr{B}(X))$ 是包含全体开集的 σ 代数. 定义

$$\begin{cases}\widetilde{f}:M(X)\to M(X),\\ \widetilde{f}(\mu)(B)=\mu(f^{-1}(B)),\forall\mu\in M(X),\forall B\in\mathscr{B}(X).\end{cases}$$

下面有时用 $\mu\cdot f^{-1}$ 代替 $\widetilde{f}\mu$.

引理 B.2.11 $\int hd(\widetilde{f}\mu)=\int h\circ fd\mu,\forall h\in C(X)$.

证明 只需对实值函数 $h\in C(X)$ 证明即可. 据 $\widetilde{f}$ 的定义, 有

$$\int\chi_Bd(\widetilde{f}\mu)=\int\chi_B\circ fd\mu,\quad\forall B\in\mathscr{B}(X).$$

所以, 如果 $h\in C(X)$ 是简单函数, 有 $\int hd(\widetilde{f})=\int h\circ fd\mu$, 用递升简单函数逼近可测函数 h, 这个式子依然成立. 显然, 分别考虑大于零部分和小于零部分, 这个式子对任意 $h:X\to\mathbb{R}$ 均成立. □

定理 B.2.12 映射 $\widetilde{f}:M(X)\to M(X)$ 是仿射连续的.

证明 如果 $h\in C(X)$, 则 $\int hd\widetilde{f}\mu=\int h\circ fd\mu$. 所以, 如果在 $M(X)$, $\mu_n\to\mu$, 则

$$\int hd\widetilde{f}\mu_n=\int h\circ fd\mu_n\to\int h\circ fd\mu=\int hd\widetilde{f}\mu,$$

所以 $\widetilde{f}\mu_n \to \widetilde{f}\mu$, 这证明 $\widetilde{f}$ 的连续性.

如果 $m, \mu \in M(X), p \in [0,1]$, 那么

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(pm+(1-p)\mu)(B) &= pm(f^{-1}(B)) + (1-p)\mu(f^{-1}(B)) \\ &= (p\widetilde{f}m + (1-p)\widetilde{f}\mu)(B), \forall B \in \mathscr{B}(X).\end{aligned}$$

这证明 $\widetilde{f}$ 是仿射的. □

下面定理给出紧致系统不变测度的存在性.

定理 B.2.13　*设 (X,f) 为紧致系统. 又设 $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $M(X)$ 上任意序列, 由 $\mu_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\widetilde{f}\sigma_n$ 得到 $M(X)$ 中一个新序列 $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$. 则 $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的任意极限点对 f 不变, 即是 f 的不变测度.*

证明　设 $\{n_j\} \nearrow$ 为子序列, 使 $\mu_{n_j} \to \mu \in M(X)$. $h \in C(X)$, 则

$$\begin{aligned}\left|\int h\circ f d\mu - \int h d\mu\right| &= \lim_{j\to\infty}\left|\int h\circ f d\mu_{n_j} - \int h d\mu_{n_j}\right| \\ &= \lim_{j\to\infty}\left|\frac{1}{n_j}\int\sum_{i=0}^{n_j-1}(h\circ f^{i+1} - h\circ f^i)d\sigma_{n_j}\right| \\ &= \lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\int(h\circ f^{n_j} - h)d\sigma_{n_j} \leqslant \lim_{j\to\infty}\frac{2\|h\|}{n_j} = 0.\end{aligned}$$

□

推论 B.2.14　*设 $x \in X$, 则 $\left\{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i}(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限点对 f 不变, 其全体极限点的集合记为 M_x, 叫做沿点 x 的轨道生成的不变测度.*

下面用 $M(X,f)$ 表示 f 的全体不变测度的集合, 用 $E(X,f)$ 表示 f 的全体不变遍历测度的集合. 有

定理 B.2.15　*(1) $M(X,f)$ 是 $M(X)$ 的紧致凸子集;*

(2) $E(X,f)$ 是 $M(X,f)$ 中尖点 (extreme point) 构成的子集, 即那些不能表示为其他点的凸组合的点的子集合.

证明　(1) 设 $M(X,f)$ 上序列 $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $M(X)$ 上 $\mu_n \to \mu$, 那么

$$\int h d\widetilde{f}\mu = \int h\circ f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int h\circ f d\mu_n = \lim_{n\to\infty}\int h d\mu_n = \int h d\mu,$$

所以 $\mu \in M(X,f)$. $M(X,f)$ 的凸性是明显的.

(2) 设 $\mu \in M(X,f)\setminus E(X,f)$. 存在 $E \in \mathscr{B}(X), f^{-1}(E) = E, 0 < \mu(E) < 1$. 定义 μ_1, μ_2, 使得

$$\mu_1(B) = \frac{\mu(B\cap E)}{\mu(E)}, \quad \mu_2(B) = \frac{\mu(B\cap(X\setminus E))}{\mu(X\setminus E)}, \quad \forall B \in \mathscr{B}(X).$$

注意, $\mu_1, \mu_2 \in M(X,f), \mu_1 \neq \mu_2$, 且

$$\mu(B) = \mu(E)\mu_1(B) + (1-\mu(E))\mu_2(B).$$

所以 μ 不是 $M(X,f)$ 的尖点.

反过来, 设 $\mu \notin E(X,f), \mu = p\mu_1 + (1-p)\mu_2, \mu_1, \mu_2 \in M(X,f), p \in [0,1]$. 我们证明 $\mu_1 \neq \mu_2$. 显然, $\mu_1 \ll \mu$, 即 μ_1 关于 μ 绝对连续, 所以 Radon-Nikodym 导数 $d\mu_1 \setminus d\mu$ 存在, 即 (见定理 B.1.3)

$$\mu_1(E) = \int_E \frac{d\mu_1(x)}{d\mu} d\mu(x), \quad \forall E \in \mathscr{B}(X)$$

于是有 $d\mu_1 \setminus d\mu \geqslant 0$. 设

$$E = \left\{x : \frac{d\mu_1}{d\mu}(x) < 1\right\}.$$

因此有

$$\begin{aligned}\int_{E\cap f^{-1}(E)} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu + \int_{E\setminus f^{-1}(E)} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu = \mu_1(E) = \mu_1(f^{-1}(E))\\ = \int_{E\cap f^{-1}(E)} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu + \int_{f^{-1}(E)\setminus E} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu,\end{aligned}$$

所以

$$\int_{E\setminus f^{-1}(E)} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu = \int_{f^{-1}(E)\setminus E} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu.$$

因为在 $E \setminus f^{-1}(E)$ 上 $\dfrac{d\mu_1}{d\mu} < 1$, 在 $f^{-1}(E) \setminus E$ 上 $\dfrac{d\mu_1}{d\mu} \geqslant 1$, 且

$$\mu(f^{-1}(E)\setminus E) = \mu(f^{-1}(E)) - \mu(f^{-1}(E)\cap E) = \mu(E) - \mu(f^{-1}(E)\cap E) = \mu(E\setminus f^{-1}(E)),$$

因而有

$$\mu(E \setminus f^{-1}(E)) = 0 = \mu(f^{-1}(E) \setminus E).$$

所以 $\mu(f^{-1}(E)\Delta E) = 0$, 因而 $\mu(E) = 0$ 或 1, 其中 $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. 如果 $\mu(E) = 1$, 则

$$\mu_1(X) = \int_E \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu < \mu(E) < 1,$$

与 $\mu_1(X) = 1$ 矛盾. 故 $\mu(E) = 0$.

类似地, 如果 $F = \{x : d\mu_1 \setminus d\mu > 1\}$, 有 $\mu(F) = 0$, 所以 $d\mu_1 \setminus d\mu = 1$ a.e(μ), 因此 $\mu_1 = \mu$, 因而 μ 是 $M(X,f)$ 的尖点. □

至此, 得到 Kryloff-Bogoliuboff 不变测度理论的基本结论：对紧致系统 (X,f), 有

$$M(X) \supset M(X,f) \supset E(X,f) \neq \varnothing.$$

B.2.2 变分原理

设 (X,f) 为紧致系统, 并赋以 Borel σ 代数 $\mathscr{B}(X)$. 因此 $(X,\mathscr{B}(X))$ 又是一个可测空间. 设 $m\in M(X,f)$, 则 $(X,\mathscr{B}(X),f,m)(m(X)=1)$ 是一个概率系统.

对紧致系统 (X,f), 我们定义了拓扑熵 $\mathrm{ent}(f)$. 对概率系统 $(X,\mathscr{B}(X),f,m)$, 我们定义了测度熵 $h_m(f)$. 前者是唯一的, 而后者是依赖不变测度的不同而不同的. 关于拓扑熵和测度熵之间的关系, 文献 [1] 在引进拓扑熵概念的同时证明了:

定理 B.2.16 $h_m(f)\leqslant \mathrm{ent}(f),\forall m\in M(X,f)$.

后来经很多学者的努力, 最后得到

定理 B.2.17 $\mathrm{ent}(f)=\sup\{h_m(f),\forall m\in M(X,f)\}=\sup\{h_m(f),\forall m\in E(X,f)\}$.

后面这个漂亮的定理就是所谓的拓扑熵和测度理论熵之间的变分原理. 这两个定理我们不加证明, 请读者参阅文献 [42], [50].

我们说过, 一个紧致系统 (X,f) 其遍历测度是基本的. 下述定理给出一个不变测度是遍历测度的充要条件, 具有重要应用.

定理 B.2.18 *为了符号不发生混淆, 记 (X,T) 为一个紧致系统. 设 $m\in M(X,T)$, 则*

$$m\in E(X,T)\Leftrightarrow \exists Y\in\mathscr{B}(X),m(Y)=1,\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{T^i(x)}\to m,\forall x\in Y.$$

证明 先证明必要性. 设 $m\in E(X,T)$. 设 $\{f_k\}_1^\infty$ 是 $C(X)$ 的一组可数基. 据遍历定理, 存在 $X_k\in\mathscr{B}(X),m(X_k)=1$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f_k(T^i(x))=\int f_k dm,\quad \forall x\in X_k.$$

令 $Y=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}X_k$, 有 $m(Y)=1$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f_k(T^i(x))=\int f_k dm,\forall x\in Y,\quad \forall k>0.$$

对给定的 $f\in C(X)$ 取 $f_k\to f$, 据控制收敛定理[50], 即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f_k(T^i(x))=\int f dm,\quad \forall x\in Y,\forall f\in C(X).$$

由上式可得 (见文献 [50] 引理 6.13)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{T^i(x)}\to m,\quad \forall x\in Y,m(Y)=1.$$

充分性的证明. 设

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \to m, \quad \forall x \in Y \in \mathscr{B}(X), m(Y)=1.$$

于是

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} f(T^i(x)) \to \int f dm, \quad \forall x \in Y, \forall f \in C(X).$$

如果 $x \in Y, f \in C(X), g \in L^1(m)$, 又得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} f(T^i(x))g(x) \to g(x)\int f dm.$$

应用控制收敛定理, 据文献 [50] 引理 6.11, 得到 m 的遍历性条件. □

本书的一个基础想法是寻求最 "小" 的全概率集合. 这个定理为我们实现这种想法的基础. 因此这个定理在本书中起重要作用.

下面引进两个有用的术语.

定义 B.2.19 设 $f \in C(X), m \in M(X,f)$. 称子集合 $E \subset X$ 是 m 的支撑, 如果 E 是最小的对 f 不变的紧致子集, 使得 $m(E)=1$. m 的支撑用 S_m 表示. 支撑是唯一存在的, 且 $f(S_m) \subset S_m$, 即支撑对 f 不变.

定义 B.2.20 设 $x \in X, m \in M(X,f)$. 说 x 是 m 的支撑点, 如果

$$\forall \varepsilon > 0, m(V(x,\varepsilon)) > 0.$$

容易证明, $m \in M(X,f), S_m$ 等于 m 的全体支撑点的集合, 即

$$S_m = \{x \in X | \forall \varepsilon > 0, m(V(x,\varepsilon)) > 0\}.$$

说 x 是 f 的支撑点, 如果

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in M(X,f), m(V(x,\varepsilon)) > 0.$$

容易证明支撑点的集合是闭的. f 的全体支撑点的集合记为 $S(f)$. 不难证明

$$S(f) = \overline{\bigcup_{m \in M(X,f)} S_m}.$$

附录 C　C^0 流的两个新的回复层次①

动力系统的核心问题是轨道拓扑结构的渐近性. 然而, 只有那些轨道具有一定回复性且构成一个满测集的点才是重要的. 当然, 这样的集合越 "小" 越好 (在集合包含的意义下). 下面将讨论如下两个集合: 弱几乎周期点集和拟弱几乎周期点集. 由定义可知, 这两个集合彼此是不同的. 但是在一个动力系统中, 我们将证明它们的闭包与系统的测度中心 (极小吸引中心) 是一致的. 一般地, 一个点的轨道结构有三个层次: 由该点生成的不变测度的支撑, 它的极小吸引中心及它的 ω 极限集. 我们研究弱几乎周期点和拟弱几乎周期点的轨道的这三个层次, 证明了拟弱几乎周期点的轨道具有更丰富的拓扑结构. 同时, 给出了一个点属于它自身的极小吸引中心的充要条件.

C.1　引　言

我们主要研究 C^0 流 (简称为动力系统) 的回复性问题.

众所周知, 动力系统的核心问题是点的轨道的拓扑结构的渐近性. 但是是否每一点的轨道都是重要的呢? 从拓扑的角度来看, 人们知道只有具有某种回复性的那些点的轨道才是重要的. 通常, 回复性具有四个层次: 周期点、几乎周期点、回复点和非游荡点. 它们具有不同的动力性质[43],[105],[109],[112]. 因此, 人们可以说所有重要的动力性状发生在非游荡集. 另一方面, 从遍历论的角度来看, 所有重要的动力性状集中在一个满测集上. 当然, 这样的满测集越小越好 (在集合包含的意义下). 我们知道非游荡点集是一个满测集. 但是它是否是最小的呢? 事实并非如此, 因为回复点集真包含于非游荡点集中且同样是一个满测集. 另一方面, 我们知道几乎周期点的集合 (以及它的闭包) 不是满测集. 在一个动力系统中, 称最小的紧的不变的满测集为它的测度中心. 为了刻画测度中心, 文献 [94] 引进了弱几乎周期点的概念, 它们具有比几乎周期点更弱而比回复点更强的回复性. 弱几乎周期点集是一个满测集, 并且它的闭包刚好就是测度中心 (或极小吸引中心). 在此意义下, 弱几乎周期点集就是最小的满测集.

我们知道一个点是回复的当且仅当它属于自己的 ω 极限集, 并且一个点是几乎周期的当且仅当它是回复的和它的 ω 极限集是极小的. 于是人们想知道, 在什么

---

① 国家自然科学基金 (11071263) 和广东省自然科学基金资助项目. 作者: 黄煜, 周作领. 原文为英文, 尹建东译.

条件下一个点属于它自己的极小吸引中心? 为了回答这个问题, 我们引进了另一个满测集, 即拟弱几乎周期点集, 它介于弱几乎周期点集和回复点集之间. 我们证明了它的闭包正是系统的测度中心或极小吸引中心. 另外, 还证明了一个点属于它自己的极小吸引中心当且仅当它是拟弱几乎周期点. 因此, 与弱几乎周期点相比较而言, 拟弱几乎周期点具有更丰富的轨道结构.

设 X 是一个紧度量空间, d 是一个度量, $F: X \times \mathbb{R} \to X$ 或 $F_t: X \to X$ 表示一个 C^0 流 (也称一维参数变换群), 其中 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. 称 X 中的点 x 为几乎周期的, 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T > 0$ 使得对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 有 $t' \in [t, T+t]$ 满足 $d(x, F(x,t')) < \varepsilon$. 称 X 中的点 x 是回复的, 如果存在正数序列 $t_n \to \infty$ 使得 $d(x, F(x, t_n)) \to 0$ $(n \to +\infty)$. 注意到, 在一些文献中, 几乎周期点和回复点分别称为回复稳定的和 Poisson 稳定的[8,12]. 我们分别用 $A(F)$, $W(F)$, $QW(F)$ 和 $R(F)$ 表示几乎周期点集、弱几乎周期点集、拟弱几乎周期点集和回复点集. 由定义易知

$$A(F) \subseteq W(F) \subseteq QW(F) \subseteq R(F).$$

我们将从以下三方面进行研究: 测度中心、极小吸引中心、轨道层次.

测度中心　动力系统研究的核心问题是研究轨道拓扑结构的渐近性. 这并不意味每点的轨道都是重要的. 在遍历论的框架下, 一个系统的所有重要性质集中在一个不变的满测集上. 众所周知, 回复点集是一个不变的满测集. 我们将试图找到最小的不变的满测集. 为此, 引进测度中心这个概念. X 的闭的不变集 M 称为 F 的测度中心, 如果对 F 的任意不变概率测度 μ, 有 $\mu(M) = 1$, 并且不存在 M 的真子集具有上述性质. 用 $M(F)$ 表示 F 的测度中心. 则把 F 限制在 $M(F)$ 上, 在遍历意义下, $F|_{M(F)}$ 是保持系统所有重要性质的最小子系统. 为了研究子系统 $F|_{M(F)}$, 必须研究 $M(F)$ 的拓扑结构. 显然

$$M(F) = \overline{\bigcup_{m \in M(X,F)} S_m} = \overline{\bigcup_{m \in E(X,F)} S_m}, \tag{C.1.1}$$

其中 $M(X,F)$ 和 $E(X,F)$ 分别是 F 的不变测度和遍历测度的集合, S_m 是测度 m 的支撑. 由于我们对支撑的结构所知甚少, 上述结论也并未揭示测度中心的任何更深层次的结构问题. 下面将证明

$$M(F) = \overline{W(F)} = \overline{QW(F)},$$

这个结果把轨道的回复性与测度中心紧密结合起来了.

极小吸引中心　吸引子是动力系统研究中另一类重要的不变子集[43],[111],[114],[115]. 其中文献 [95] 引进了我们所提及的极小吸引中心. 称集合 A 是 F 的极小吸引

中心, 如果 A 是一个闭的不变集合且对任意的 $x \in X$ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 极限

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \chi_{O_\varepsilon(A)}(F_t(x))d\tau$$

存在且等于 1, 其中 χ_A 是 A 的特征函数, 并且 A 没有真子集满足上述性质. 用 $C(F)$ 表示 F 的极小吸引中心. 由文献 [12] 知

$$\overline{A(F)} \subseteq C(F) \subseteq \overline{R(F)}.$$

此结果并未指出极小吸引中心 $C(F)$ 中点的回复性, 因为上述包含关系可以是真包含. 易知, Birkhoff 遍历定理蕴涵 (见文献 [9] 中练习 I.8.3 和练习 II.1.5)

$$C(F) = \overline{\bigcup_{m\in E(X,F)} S_m}.$$

则由 (C.1.1), 得

$$C(F) = \overline{W(F)} = \overline{QW(F)}.$$

轨道层次　虽然 $\overline{W(F)} = \overline{QW(F)}$, 但是 $W(F)$ 和 $QW(F)$ 中的点的轨道具有不同的拓扑结构, 这是我们将极力说明的问题. 对 $x \in X$, 设 $\omega(x)$ 为 x 的 ω 极限集, 即 $\omega(x)$ 是 X 的闭不变子集, 满足: 当 $t \to +\infty$ 时,

$$d(F(x,t),\omega(x)) \to 0.$$

并且 $\omega(x)$ 没有真子集满足上述性质. 现在引进另两类与 x 的轨道相关的不变集. 其一是 x 的极小吸引中心, 用 C_x 来表示, 定义为全概率吸引点 x 的闭不变子集且不存在 C_x 的真子集具有上述性质. 其二是由点 x 生成的不变概率测度的支撑. 这些不变测度是由点 x 的轨道所生成的概率测度序列的弱 * 极限. 易证, 点 x 的轨道的三个层次: $\omega(x)$, C_x 和 S_μ, 满足: 对任意的 $x \in X$, 有

$$S_\mu \subseteq C_x \subseteq \omega(x), \qquad \forall \mu \in M_x.$$

其中 M_x 表示由点 x 所生成的不变概率测度的集合.

显然, X 中的点 x 是回复的当且仅当 x 属于它自身的 ω 极限集. 文献 [22] 已证 X 中的点 x 是几乎周期的当且仅当 x 的轨道的闭包是极小的. 我们将证明以下两个结论:

(1) 设 $x \in R(F)$, 则 x 是拟弱几乎周期点当且仅当 $x \in C_x$.

(2) 设 $x \in R(F)$, 则 x 是弱几乎周期点当且仅当对任意的 $\mu \in M_x$, 有 $x \in S_\mu$.

这两个结论揭示了回复层次和轨道层次之间的关系.

在文献 [94], [95], [100] 中, 针对离散动力系统, 周作领教授首次引进了弱几乎周期点和拟弱几乎周期点这两个概念, 而弱几乎周期点集在线段开关系统的几乎必然稳定性研究中起着重要作用[107],[108].

本文结构安排如下：C.2 节定义了一些新概念并给出了本文主要结论. C.3 节给出了在本文主要结论证明中起关键作用的一些命题和引理. C.4 节是本文主要结论的证明. C.5 节举例说明弱几乎周期点和拟弱几乎周期点是两个不同的概念. 构造出的例子及其构造方法具有一定的意义. 这里的 C^0 流是通过线性插值方法构造出来的, 它和通过与离散系统同纬所得到的流是不同的. 所采用的方法也不会增加基本空间的维数, 更为重要的是, 我们通过线性插值方法所获得的流具有与离散系统相应的性质.

C.2 概念和主要结论

假设 $(X,\ d)$ 是紧空间, $F:\ X\times\mathbb{R}\to X$ 或 $F_t:\ X\to X$ 是一个 C^0 流, 其中 $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$. 对于 X 的点 x, 用 $\omega(x,F),\alpha(x,F)$ 和 $L(x,F)$ (在不产生混淆时, 简记为 $\omega(x),\alpha(x)$ 和 $L(x)$) 分别表示 x 在 F 作用下的 ω 极限集、α 极限集和极限集, 其中 $\omega(x)$ 是当 $t\to+\infty$ 时, $F(x,t)$ 的极限点的集合, $\alpha(x)$ 是 F_{-t} 的 ω 极限集, 而 $L(x)=\omega(x)\cup\alpha(x)$.

设 $E\in\mathcal{B}(X)$, 其中 $\mathcal{B}(X)$ 是由 X 的开子集所生成的 Borel σ 代数. 如果对任意的 $x\in X$, 极限

$$P_x(E)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\chi_E(F(x,t))dt \tag{C.2.1}$$

存在, 则称 $P_x(E)$ 是 x 在 F 作用下正向进入 E 的概率, 其中 χ_E 是 E 的特征函数. 如果上述极限不存在, 令

$$\overline{P}_x(E)=\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\chi_E(F(x,t))dt, \tag{C.2.2}$$

$$\underline{P}_x(E)=\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\chi_E(F(x,t))dt. \tag{C.2.3}$$

显然, $0\leqslant\underline{P}_x(E)\leqslant\overline{P}_x(E)\leqslant1$.

定义 C.2.1 设 $X_0\subseteq X$ 是一个非空集合. X 的子集 E 称为 F 相对于 X_0 的吸引中心, 如果 E 是闭的, F 不变的 (即对任意的 $t\in\mathbb{R}$, $F(E,t)=E$), 并且对任意的 $\varepsilon>0$ 和 $x\in X_0$, 有 $P_x(V(E,\varepsilon))=1$, 其中 $V(E,\varepsilon)=\{y\in X\mid d(E,y)<\varepsilon\}$. F 的相对于 X_0 的吸引中心称为极小的, 如果它没有真子集也是 F 相对于 X_0 的吸引中心.

令 $C(X_0)$ 表示 F 相对于 X_0 的极小吸引中心. 特别地, 对任意的 $x \in X$, 记 $C_x \equiv C(\{x\})$ 和 $C(F) \equiv C(X)$, 并称它为 F 的极小吸引中心. 分别用 $M(X)$, $M(X,F)$ 和 $E(X,F)$ 表示 $(X,\mathcal{B}(X))$ 的概率测度的集合, $M(X)$ 中 F 的不变测度的集合和 F 的遍历测度的集合. 显然 $\varnothing \neq E(X,F) \subseteq M(X,f) \subseteq M(X)$, $M(X)$ 在弱 * 拓扑下是一个紧的可度量化的凸空间, $M(X,F)$ 是 $M(X)$ 的紧凸子集, $E(X,F)$ 是由 $M(X,F)$ 中的极点构成的集合[12]. 子集 Λ 称为具有满测度 (满遍历测度), 如果对任意的 $m \in M(X,F)$ $(m \in E(X,F))$, 存在 Λ 的一个可测子集 Λ_0 使得 $m(\Lambda_0)=1$. 易见 Λ 是满测度的当且仅当它是满遍历测度的. X 中的点 x 通常对应一个点测度 δ_x, 即对于 $A \in \mathcal{B}(X)$,

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x \in A, \\ 0, & \text{如果 } x \notin A. \end{cases}$$

对任意无界序列 $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_i < \cdots$, 通过 Rieze 表示定理, 存在测度序列 $\{\delta_{x,t_i}\}$ 使得对 X 上的每一个连续函数 ϕ, 有

$$\int_X \phi \, d\delta_{x,t_i} = \frac{1}{t_i}\int_0^{t_i} \phi(F(x,t))dt, \qquad i = 0,1,2,\cdots. \tag{C.2.4}$$

当 $i \to \infty$, $\{\delta_{x,t_i}\}$ 的所有极限都属于 $M(X,F)$[12]. 设 M_x 是这样的极限点的集合并且 $M_{X_0} = \bigcup\limits_{x \in X_0} M_x$, 其中 $X_0 \subseteq X$. 进而, 如果 M_x 是一个单点集 $\{m_x\}$, 则对 X 上的每一个连续函数 ϕ, 极限

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \phi(F(x,t))dt$$

存在. 这样的点 x 称为正拟正规的, 并且相应的单点不变测度 m_x 称为由 x 所生成的. 设 $\mathcal{U}_+$ 表示所有的正拟正规点的集合. 类似地, 可以定义负拟正规点和集合 $\mathcal{U}_-$. 令 $\mathcal{U} = \mathcal{U}_+ \cap \mathcal{U}_-$. 易见, $\mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-$ 且 $\mathcal{U}$ 是 F 的不变集.

设 $m \in M(X,F)$. $x \in X$ 称为 m 的密度点, 如果对任意的 $\varepsilon > 0$ 有 $m(V(x,\varepsilon)) > 0$. 令

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_D &= \{x \in \mathcal{U}_+ \mid x \text{ 是 } m_x \text{ 的密度点}\}, \\ \mathcal{U}_T &= \{x \in \mathcal{U}_+ \mid m_x \text{ 是一个遍历测度}\}, \\ \mathcal{U}_R &= \mathcal{U}_D \cap \mathcal{U}_T. \end{aligned}$$

$\mathcal{U}_R$ 中的点称为 F 的正规点.

命题 C.2.2[43] (1) $\mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-, \mathcal{U}, \mathcal{U}_D, \mathcal{U}_T, \mathcal{U}_R$ 和 $R(F)$ 都是满测集;
(2) $\overline{A(F)} \subseteq C(F) = \overline{\mathcal{U}}_R \subseteq \overline{R(F)}$.

这个结论揭示了 $C(F)$ 中的点的回复性质, 并且表明极小吸引中心 $C(F)$ 是一个满测闭子集. 但是几乎周期点集的闭包可以是 $C(F)$ 的真子集并且回复点的闭包可以真包含 $C(F)$.

以下两个问题是自然的且未解决. 其一是: $C(F)$ 是否是一个极小满测度闭不变集? 为了回答此问题, 我们引进了 C^0 流的测度中心这个概念, 并且证明了 $C(F)$ 正是 F 的测度中心 (见定理 C.2.4). 因此, F 在 $C(F)$ 上的限制 $F|_{C(F)}$, 是在遍历意义下保持系统所有重要性质的最小子系统. 众所周知, 测度中心在离散动力系统中同样起着重要作用.

另一个问题是: 怎样通过点的轨道的回复性来刻画 $C(F)$? 为此, 在几乎周期点和回复点之间, 我们引进了一个新的回复层次, 即弱几乎周期点, 并且得到 $C(F)$ 等于弱几乎周期点集的闭包 (见定理 C.2.7).

定义 C.2.3 设 X_0 是 X 一个非空子集. X 的子集 E 称为 F 相对于 X_0 的测度中心如果 E 满足:

(1) E 是闭的;

(2) E 是不变的, 即对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 有 $F(E,t) = E$;

(3) 对每一个 $m \in M_{X_0}$, 有 $m(E) = 1$, 并且 E 没有真子集满足上述三条件.

进而, E 称为 F 的测度中心, 如果 E 满足上述条件 (1), (2) 和下列条件 (3′).

(3′) 对任意的 $m \in M(X,F)$, 有 $m(E) = 1$.

设 $M(X_0)$ 和 $M(F)$ 分别是 F 相对于 X_0 的测度中心和 F 的测度中心.

定理 C.2.4 设 X_0 是 X 的一个非空子集. 则

$$C(X_0) = M(X_0) = \overline{\bigcup_{m \in M_{X_0}} S_m}.$$

特别地,

$$C(F) = M(F) = \overline{\bigcup_{m \in M(X,F)} S_m} = \overline{\bigcup_{m \in E(X,F)} S_m}.$$

其中 S_m 是不变测度 m 的支撑.

注记 C.2.5 Birkhoff 遍历定理蕴涵 (见文献 [113] 的练习 I.8.3 和 II.1.5)

$$C(F) = \overline{\bigcup_{m \in E(X,F)} S_m},$$

这是定理 C.2.4 的一种特殊情形.

为了确切地描述 F 的极小吸引中心的拓扑结构, 我们引进下列概念.

定义 C.2.6[97] 设 $x \in X$. x 称为是正 (负) 弱几乎周期点, 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在整数 $N > 0$ 具有以下性质: 对任意正整数 n, 对于 $i = 0, 1, \cdots, n-1$, 存在

$0 \leqslant t_0 < t_1 \cdots < t_n < nN(-nN < t_n < \cdots < t_1 < t_0 \leqslant 0)$, $|t_{i+1} - t_i| \geqslant 1$ 使得 $F(x, t_i) \in V(x, \varepsilon)$, $i = 0, 1, \cdots, n$.

令 $W_+(F)(W_-(F))$ 表示 F 的所有正 (负) 弱几乎周期点的集合. $W(F) \equiv W_+(F) \cap W_-(F)$ 称为 F 的弱几乎周期点集. 易见 $W_+(F), W_-(F)$ 和 $W(F)$ 是 F 的不变集且 $A(F) \subseteq W(F) \subseteq R(F)$. C.5 节将举例说明上述包含关系可以是真包含.

定理 C.2.7　设 $x \in R(F)$. 下列叙述是等价的:

(1) $x \in W_+(F)$;

(2) $\underline{P}_x(V(x, \varepsilon)) > 0$, $\forall \varepsilon > 0$;

(3) $x \in C_x = S_m$, $\forall m \in M_x$;

(4) $S_m = \omega(x, F)$, $\forall m \in M_x$.

设 $W_0(F) = \{x \in W(F) \mid M_x = \{m_x\}$ 和 $m_x \in E(X, F)\}$. 显然, $W_0(F)$ 是 F 的不变集.

定理 C.2.8　(1) $W_0(F) = \mathcal{U}_R \cap R(F)$;

(2) $W(F)$ 和 $W_0(F)$ 是满测集;

(3) $C(F) = \overline{W(F)} = \overline{W_0(F)}$.

如果 $x \in P(F)$, 则 M_x 是一个单点集 $\{m_x\}$. 进而, 如果 m_x 是遍历的, 则 m_x 称为周期轨的遍历 (原子) 测度.

定理 C.2.9　下列条件等价:

(1) $W_0(F) = P(F)$;

(2) $m(P(F)) = 1$, $\forall m \in M(X, F)$;

(3) F 没有非周期轨的遍历测度.

现在考虑轨道的拓扑结构. 对于 X 中的每一点 x, 不仅有它的 ω 极限集 $\omega(x)$, 而且有它的极小吸引中心 C_x 和由 x 所生成的不变测度集 M_x. ω 极限集 $\omega(x)$、极小吸引中心 C_x 和不变测度 $m \in M_x$ 的支撑 S_m 构成了点 x 的轨道拓扑结构的三个层次. 显然, 对每一个 $m \in M_x$, $S_m \subseteq C_x \subseteq \omega(x, F)$. 另外, $x \in X$ 是回复的当且仅当 x 属于 $\omega(x, F)$. 由定理 C.2.7, 点 x 是弱几乎周期的当且仅当 x 属于由 x 所生成的每一个不变测度的支撑. 而且, 一个弱几乎周期点属于它自己的极小吸引中心, 但反过来通常不成立. 为了给出一个点属于它自己的极小吸引中心的充要条件, 我们引进点的轨道回复性的另一个层次.

定义 C.2.10　设 $x \in X$. x 称为是 F 的正拟弱几乎周期点, 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N_ε 和递增正整数序列 $\{n_j\}$ 满足下列性质: 对每一个 j 和 $i = 0, 1, \cdots, n_j - 1$, 存在 $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_{n_j} < n_j N$ 且 $t_{i+1} - t_i \geqslant 1$ 使得 $F(x, t_i) \in V(x, \varepsilon)$ 其中 $i = 0, 1, \cdots, n_j$.

类似地, 可以定义 F 的负拟弱几乎周期点集. 分别用 $QW_+(F)$ 和 $QW_-(F)$ 表示 F 的正拟弱几乎周期点的集合和负拟弱几乎周期点的集合. $QW(F) \equiv QW_+(F) \cap QW_-(F)$ 称为 F 的拟弱几乎周期点集. 易见 $QW_+(F)$, $QW_-(F)$ 和 $QW(F)$ 是 F 的不变子集且

$$A(F) \subseteq W(F) \subseteq QW(F) \subseteq R(F).$$

C.5 节举例说明上述包含关系可以是真包含. 下述定理给出了正拟弱几乎周期点的几个等价定义.

定理 C.2.11 令 $x \in R(F)$. 下列叙述等价:

(1) $x \in QW_+(F)$;

(2) $\overline{P_x}(V(x, \varepsilon)) > 0, \ \forall \varepsilon > 0$;

(3) $x \in C_x$;

(4) $\omega(x, F) = \overline{\bigcup_{m \in M_x} S_m}$;

(5) $C_x = \omega(x, F)$.

推论 C.2.12 $\overline{QW(F)} = \overline{W(F)} = C(F) = M(F)$.

由定理 C.2.7 和定理 C.2.11, 易得点 x 的轨道拓扑结构的层次与其轨道回复性的关系.

推论 C.2.13 设 $x \in R(F)$. 则

(1) $x \in R(F) \backslash QW(F)$ 当且仅当 $x \in \omega(x, F)$ 和 $x \notin C_x$;

(2) $x \in QW(F) \backslash W(F)$ 当且仅当 $x \in C_x$, 存在某个 $m \in M_x$ 使得 $S_m \subsetneqq C_x$, 且 M_x 不是单点集;

(3) $x \in W(F)$ 当且仅当 $x \in S_m$ 且对每一个 $m \in M_x$, 有 $S_m = C_x = \omega(x, F)$. 此时, M_x 可以是单点集也可以不是.

注记 C.2.14 对于一个 C^0 流, 在几乎周期点和回复点之间, 我们引进了两个新的回复层次. 一方面, 这两个回复层次刻画了极小吸引中心和测度中心的拓扑结构. 另一方面, 在遍历意义下, 它们又具有不同的性质.

C.3 一些命题与引理

这一节主要介绍在主要结论证明中起重要作用的一些命题和引理. 为了简单起见, 先引进几个已知的命题. 命题 C.3.1 的证明见文献 [50], 命题 C.3.2 和命题 C.3.3 的证明见文献 [43].

命题 C.3.1 设 m, $m_i \in M(X)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 和在弱 * 拓扑下当 $i \to \infty$ 时, $m_i \to m$.

(1) 如果 $E \subseteq X$ 是开集, 则 $\liminf\limits_{i \to \infty} m_i(E) \geqslant m(E)$;

(2) 如果 $E \subseteq X$ 是闭集, 则 $\limsup\limits_{i\to\infty} m_i(E) \leqslant m(E)$;

(3) 如果 $A \in \mathcal{B}(X)$, 其中 $\mathcal{B}(X)$ 是 X 上的 Borel σ 代数, 且 $m(\partial A) = 0$, 则 $\lim\limits_{i\to\infty} m_i(A) = m(A)$, 其中 ∂A 表示 A 的边界.

命题 C.3.2　设 $E \in \mathcal{B}(X)$. $m(E) = 1$, $\forall m \in M(X,F)$ 当且仅当 $m(E) = 1$, $\forall m \in E(X,F)$.

命题 C.3.3　设 $m \in M(X,F)$. $m \in E(X,F)$ 当且仅当存在集合 $Y \in \mathcal{B}(X)$ 满足 $m(Y) = 1$ 使得当 $t \to \infty$ 时, 对任意的 $\forall x \in Y$, 有

$$\delta_{x,t} \to m,$$

其中 $\delta_{x,t}$ 的定义见 (C.2.4).

命题 C.3.4　设 $x \in R(F)$. 则对任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 和 $\Delta t > 0$ 满足 $F(x,t) \in V(x,\delta)$ 蕴涵对任意的 $t \in \mathbb{R}$, $F(x,(t-\Delta t, t+\Delta t)) \subseteq V(x,\varepsilon)$.

证明　假设命题结论不成立. 则存在 $\varepsilon > \delta_1 > \cdots > \delta_n > \cdots$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, 和 $\Delta t_1 > \Delta t_2 > \cdots > \Delta t_n > \cdots$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta t_n = 0$, 以及 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$ 使得 $F(x,t_n) \in V(x,\delta_n)$, 但又存在 $t'_n, t_n+t'_n \in (t_n - \Delta t_n, t_n + \Delta t_n)$ 使得 $F(x, t_n + t'_n) \notin V(x,\varepsilon)$. 由于 $x \in R(F)$, 故可选择 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} F(x,t_n) = x$. 另一方面, 易见 $\lim\limits_{n\to\infty} t'_n = 0$. 由 F 的连续性, 得

$$\lim_{n\to\infty} F(x, t_n + t'_n) = \lim_{n\to\infty} F(F(x,t_n), t'_n) = F(x,0) = x.$$

因此矛盾.　□

引理 C.3.5　设 X_0 是 X 的非空子集, m 是 X 上的概率测度. 则集合

$$\{\varepsilon > 0 \mid m(\partial(V(X_0,\varepsilon))) > 0\}$$

是至多可数的, 其中 $V(X_0,\varepsilon)$ 是 X_0 的 ε 邻域.

证明　由 m 是概率测度直接可得.　□

引理 C.3.6　如果 $E \in \mathcal{B}(X)$, 则对任意的 $x \in X$, 有

$$\underline{P_x}(E) + \underline{P_x}(X \backslash E) \leqslant 1,$$
$$\underline{P_x}(E) + \overline{P_x}(X \backslash E) = 1,$$

其中 $\underline{P_x}$ 和 $\overline{P_x}$ 的定义分别见 (C.2.2) 和 (C.2.3).

此引理的证明由定义可直接得到, 因此省略. 下列引理由 Urysohn 引理可直接得到.

引理 C.3.7 设 A 是 X 中的一个开集或闭集. 则存在 X 上的一连续函数序列 $\{\varphi_n\}$ 使得对任意的 $x \in X$,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \chi_A(x),$$

其中 χ_A 是 A 的特征函数.

引理 C.3.8 设 $x \in X$, δ_{x,t_i} 的定义见 (C.2.4). 如果 $t_i \to \infty$ 有 $\lim\limits_{i\to\infty} \delta_{x,t_i} = m \in M_x$, 则对任意 $A \in \mathcal{B}(X)$ 且 $m(\partial A) = 0$, 有

$$m(A) = \int_X \chi_A(x)dm = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{t_i} \int_0^{t_i} \chi_A(F(x,t))dt.$$

证明 由 Urysohn 引理, 可构造连续函数序列 $\{\varphi_n\}$ 使得 $\varphi_n(x) = 1$, $\forall x \in \bar{A}$ 且 $\varphi_n(x) = 0$, $\forall x \in \left\{y \in X \mid d(\bar{A}, y) \geqslant \dfrac{1}{n}\right\}$. 显然, 关于 m, 几乎处处有

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \chi_A(x).$$

由控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n(x)dm = \int_X \chi_A(x)dm = m(A).$$

另一方面, 由定义得

$$\int_X \varphi_n(x)d\delta_{x,t_i} = \frac{1}{t_i}\int_0^{t_i} \varphi_n(F(x,t))dt, \qquad \forall i > 0, \forall n > 0.$$

令 $n \to \infty$, 则

$$\delta_{x,t_i}(A) = \int_X \chi_A(x)d\delta_{x,t_i} = \frac{1}{t_i}\int_0^{t_i} \chi_A(F(x,t))dt, \qquad \forall i > 0.$$

再令 $i \to \infty$, 由命题 C.3.1 (3) 得

$$m(A) = \int_X \chi_A(x)dm = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{t_i} \int_0^{t_i} \chi_A(F(x,t))dt. \qquad \square$$

引理 C.3.9 设 $X_0 \subseteq X$ 是一个非空子集, E 是 X 的一个开子集. 如果存在 $x \in X_0$ 使得 $\underline{P_x}(E) < 1$, 则存在 $m \in M_{X_0}$ 使得 $m(E) < 1$. 如果 $m(\partial E) = 0$, 反之亦然.

证明 设 $x \in X_0$ 满足

$$\underline{P_x}(E) = \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \chi_E(F(x,t))dt < 1.$$

则存在正数序列 $T_i \to \infty$ 使得

$$\underline{P_x}(E) = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{T_i}\int_0^{T_i} \chi_E(F(x,t))dt < 1.$$

当 $T_i \to \infty$ 时, 在弱 * 拓扑下设 (如果必要可取子列),

$$\delta_{x,T_i} \to m \in M_{X_0},$$

其中 δ_{x,T_i} 的定义见 (C.2.4).

由命题 C.3.1 (1) 和 (C.2.4), 有

$$\begin{aligned} m(E) &\leqslant \liminf_{i\to\infty} \delta_{x,T_i}(E) = \liminf_{i\to\infty} \int_X \chi_E(x)d\delta_{x,T_i} \\ &= \liminf_{i\to\infty} \frac{1}{T_i}\int_0^{T_i} \chi_E(F(x,t))dt = \underline{P_x}(E) < 1. \end{aligned}$$

反过来, 设存在不变测度 $m \in M_{X_0}$ 使得 $m(E) < 1$. 则由定义存在 $x \in X_0$ 和正数序列 $T_i \to \infty$ 使得

$$m = \lim_{i\to\infty} \delta_{x,T_i}.$$

由引理 C.3.8 得

$$\begin{aligned} \underline{P_x}(E) &= \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{T} \chi_E(F(x,t))dt \\ &\leqslant \liminf_{i\to\infty} \frac{1}{T_i}\int_0^{T_i} \chi_E(F(x,t))dt \\ &= m(E) < 1. \end{aligned}$$

□

引理 C.3.10　设 $x \in R(F)$. 则 $x \in W_+(F)$ 当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$, 有 $\underline{P_x}(V(x,\varepsilon)) > 0$.

证明　设 $x \in W_+(F)$. 注意到 $x \in R(F)$. 由命题 C.3.4, 对任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 和 $\Delta t > 0$ $(0 < \Delta t < 1/2)$ 使得对任意的 $t \in \mathbb{R}$, $F(x,t) \in V(x,\delta)$ 蕴涵 $F(x,(t-\Delta t, t+\Delta t)) \subseteq V(x,\varepsilon)$.

对上述 $\delta > 0$, 由正拟弱几乎周期点的定义, 存在 $N_\delta > 0$ 使得对每一个正整数 n, 存在 $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n < nN_\delta$ 使得对 $i = 0,1,\cdots,n-1$ 有 $t_{i+1} - t_i \geqslant 1$ 且 $F(x,t_i) \in V(x,\delta)$.

设 $\{T_i\}$ 是任意实数序列满足当 $i \to \infty$ 时, $T_i \to \infty$. 记 T_i 为 $T_i = n_iN_\delta + \Delta T_i$, 其中 $0 \leqslant \Delta T_i < N_\delta$, $\forall i \geqslant 0$. 因此有

$$\begin{aligned} &\lim_{i\to\infty} \frac{1}{T_i}\int_0^{T_i} \chi_{V(x,\varepsilon)}(F(x,t))dt \\ =&\lim_{i\to\infty} \frac{1}{T_i}\left[\int_0^{n_iN_\delta} \chi_{V(x,\varepsilon)}(F(x,t))dt + \int_{n_iN_\delta}^{n_iN_\delta+\Delta T_i} \chi_{V(x,\varepsilon)}(F(x,t))dt\right] \end{aligned}$$

$$\geqslant \lim_{i\to\infty}\frac{1}{T_i}\sum_{i=0}^{n_i-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\chi_{V(x,\varepsilon)}(F(x,t))dt$$

$$\geqslant \lim_{i\to\infty}\frac{1}{T_i}\sum_{i=0}^{n_i-1}2\Delta t=\lim_{i\to\infty}\frac{2n_i\Delta t}{n_iN_\delta+\Delta T_i}$$

$$=\frac{2\Delta t}{N_\delta}.$$

这就证明了 $\underline{P}_x(V(x,\varepsilon))>0$.

反过来, 设 $x\notin W_+(F)$. 存在 $\varepsilon>0$ 使得对任意正整数 N, 存在正整数序列 $\{n_j\}$ 满足: 对任意的 $0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_{n_j}<n_jN$, 如果 $F(x,t_i)\in V(x,\varepsilon)$ $(i=0,1,\cdots,n_j)$, 则存在至少一个 i, $0\leqslant i<n_j-1$ 使得 $t_{i+1}-t_i<1$.

另一方面, 由于 $x\in R(F)$, 对充分大的 j, 存在 $t\in(0,n_jN)$ 使得 $F(x,t)\in V(x,\varepsilon)$. 假设 $(\tau,\tau')\subseteq(0,n_jN)$ 是包含 t 的最大开区间且 $F(x,\ (\tau,\tau'))\subseteq V(x,\varepsilon)$. 令 $\{(\tau_i,\tau_i')\}_{i=1}^{\infty}$ 表示这样的互不相交的区间的集合. 因此, 对任意 $t\in(0,n_jN)\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(\tau_i,\tau_i')$, 有 $F(x,t)\notin V(x,\varepsilon)$. 记 $|L|=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\tau_i'-\tau)$. 则

$$\frac{1}{n_jN}\int_0^{n_jN}\chi_{V(x,\varepsilon)}(F(x,t))dt=\frac{1}{n_jN}\sum_{i=1}^{\infty}(\tau_i'-\tau)=\frac{|L|}{n_jN},\quad \forall j\geqslant 0. \tag{C.3.1}$$

断言: $|L|\leqslant n_j$. 设 $|L|>n_j$. 定义从 $[0,n_jN]$ 到 $[0,|L|]$ 的函数 h 如下:

$$h(\tau)=\begin{cases}0, & \text{如果 } \tau=0,\\ \sum\limits_{\tau_i'\leqslant\tau}(\tau_i'-\tau_i), & \text{如果 } \tau\notin\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(\tau_i,\tau_i'),\\ \sum\limits_{\tau_i'\leqslant\tau}(\tau_i'-\tau_i)+\tau-\tau_j, & \text{如果 } \tau\in(\tau_j,\tau_j'),\ j\geqslant 1.\end{cases}$$

易见 h 从 $[0,n_jN]$ 到 $[0,|L|]$ 是连续递增的. 进而, h 在 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(\tau_i,\tau_i')$ 上是一对一的. 因 $|L|>n_j$, 由 h 的连续性, 可选择 $0\leqslant t_0'<t_1'<\cdots<t_{n_j}'<|L|$ 使得 $t_{j+1}'-t_j'>1$, $j=0,1,\cdots,n_j-1$, 并且存在 $t_j\in\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(\tau_i,\tau_i')$ 使得 $h(t_j)=t_j'$, $j=0,1,\cdots,n_j$. 由 h 的定义, 有 $0\leqslant t_0<\cdots<t_{n_j}<n_jN$, $t_{j+1}-t_j>1$, $j=1,\cdots,n_j-1$ 且 $F(x,t_j)\in V(x,\varepsilon)$, $j=0,1,\cdots,n_j$, 与假设 $x\notin W_+(F)$ 矛盾. 因此断言 $|L|\leqslant n_j$ 成立. 因此由 (C.3.1), 得

$$\underline{P}_x(V(x,\varepsilon))=\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\chi_{V(x,\varepsilon)}(F(x,t))dt$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_jN}\int_0^{n_jN}\chi_{V(x,\varepsilon)}(F(x,t))dt\\
&\leqslant \frac{1}{N}.
\end{aligned}
$$

令 $N\to\infty$, 有 $\underline{P}_x(V(x,\varepsilon))=0$. □

引理 C.3.11 设 $x\in R(F)$. 则 $x\in QW_+(F)$ 当且仅当对任意的 $\varepsilon>0$, $\overline{P}_x(V(x,\varepsilon))>0$.

证明 设 $x\in QW_+(F)$. 由于 $x\in R(F)$, 对任意的 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>$ 和 $\Delta t>0$ 满足命题 C.3.4 的条件. 对 $\delta>0$, 存在 $N_\delta>0$ 正整数递增序列 $\{n_j\}$ 满足: 对每一个 n_j, 存在 $0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_{n_j}<n_jN_\delta$ 满足 $F(x,t_i)\in V(x,\varepsilon)$ $(i=0,1,\cdots,n_j)$ 和 $t_{i+1}-t_i\geqslant 1$ $(i=0,1,\cdots,n_j-1)$. 因此

$$
\begin{aligned}
\overline{P}_x(V(x,\varepsilon))&=\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\chi_{V(x,\varepsilon)}(F(x,t))dt\\
&\geqslant \lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_jN_\delta}\int_0^{n_jN_\delta}\chi_{V(x,\varepsilon)}(F(x,t))dt\\
&\geqslant \lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_jN_\delta}\sum_{i=0}^{n_j-1}\int_{n_iN_\delta}^{n_{i+1}N_\delta}\chi_{V(x,\varepsilon)}(F(x,t))dt\\
&\geqslant \lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_jN_\delta}\sum_{i=0}^{n_j-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\chi_{V(x,\varepsilon)}(F(x,t))dt\\
&\geqslant \lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_jN_\delta}\sum_{i=0}^{n_j-1}2\Delta t\\
&=\frac{2\Delta t}{N_\delta}>0.
\end{aligned}
$$

反过来, 设 $x\notin QW_+(F)$. 则存在 $\varepsilon>0$ 使得对每一个 N, 存在 $n_0>0$ 满足下列条件: 对任意的 $n>n_0$ 和 $0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n<nN$, 如果 $F(x,t_i)\in V(x,\varepsilon)$, $i=0,1,\cdots,n$, 则存在至少一个 i, $0\leqslant i<n$ 满足 $t_{i+1}-t_i<1$. 另一方面, 由于 $x\in R(F)$, 故可选择充分大的 n_0, 对给定的 $n>n_0$, 存在 $t\in(0,nN)$ 使得 $F(x,t)\in V(x,\varepsilon)$. 用 L 表示 $(0,nN)$ 中的对任意的 $t\in L$ 都有 $F(x,t)\in V(x,\varepsilon)$ 的最大开集. 与引理 C.3.10 的证明类似, L 的长度 $|L|$ 不大于 n. 因此

$$
\frac{1}{nN}\int_0^{nN}\chi_{V(x,\varepsilon)}(F(x,t))dt\leqslant\frac{1}{N},\quad n\geqslant n_0.
$$

对任意递增正整数序列 $\{T_j\}$, 令 $T_j=n_jN+\Delta T_j$, $0\leqslant\Delta T_j<N$ $(j\geqslant 0)$. 则

$$
\lim_{j\to\infty}\frac{1}{T_j}\int_0^{T_j}\chi_{V(x,\varepsilon)}(F(x,t))dt
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{n_jN+\Delta T_j}\left(\int_0^{n_jN} \chi_{V(x,\varepsilon)}(F(x,t))dt + \int_{n_jN}^{n_jN+\Delta T_j} \chi_{V(x,\varepsilon)}(F(x,t))\right)dt \\
&\leqslant \lim_{j\to\infty} \frac{n_jN}{n_jN+\Delta T_j}\frac{1}{N} + \lim_{j\to\infty}\frac{\Delta t_j}{n_jN+\Delta T_j} \\
&\leqslant \frac{1}{N}.
\end{aligned}
$$

令 $N\to\infty$, 得 $\overline{P}_x(V(x,\varepsilon))=0$. 则矛盾, 因此引理得证. □

C.4 主要定理的证明

定理 C.2.4 的证明 由定义易得 $M(X_0)=S_{X_0}=\overline{\bigcup_{m\in M_{X_0}} S_m}$. 为证明 $C(X_0)=M(X_0)$, 首先断言: $M(X_0)$ 是 F 相对于 X_0 的测度中心. 事实上, 设若不然, 则存在 $x\in X_0$ 和 $\varepsilon>0$ 使得 $\underline{P}_x(V(M(X_0),\varepsilon))<1$. 由引理 C.3.9, 存在不变测度 $m\in M_{X_0}$ 使得 $m(M(X_0))\leqslant m(V(M(X_0),\varepsilon))<1$. 这与 $M(X_0)$ 的定义矛盾. 因此断言成立且 $C(X_0)\subseteq M(X_0)$.

下设 $C(X_0)\neq M(X_0)$. 令 $y\in M(X_0)\backslash C(X_0)=S_{X_0}\backslash C(X_0)$. 则存在 $\varepsilon>0$ 使得 $V(y,\varepsilon)\cap V(C(X_0),\varepsilon)=\varnothing$. 因为 y 是 F 关于 X_0 的密度点, 所以存在 $x\in X_0$ 和 $m\in M_x$ 使得 $m(V(y,\varepsilon))>0$. 由 M_x 的定义可知, 存在实数序列 $T_i\to\infty$ 满足 $\lim\limits_{i\to\infty}\delta_{x,T_i}=m$. 因此, 由 (C.2.4) 得对 X 上的任意连续函数 φ, 有

$$
\lim_{i\to\infty}\int_X \varphi d\delta_{x,T_i} = \lim_{i\to\infty}\frac{1}{T_i}\int_0^{T_i}\varphi(F(x,t))dt.
$$

由引理 C.3.5, 可设 $m(\partial V(y,\varepsilon))=0$. 由引理 C.3.8 得

$$
0<m(V(y,\varepsilon))=\int_X \chi_{V(y,\varepsilon)}(x)dm=\lim_{i\to\infty}\frac{1}{T_i}\int_0^{T_i}\chi_{V(y,\varepsilon)}(F(x,t))dt.
$$

因此, 由引理 C.3.6, 有

$$
\begin{aligned}
\underline{P}_x(V(C(X_0),\varepsilon)) &\leqslant \underline{P}_x(X\backslash V(y,\varepsilon)) \\
&= 1-\overline{P}_x(V(y,\varepsilon)) \\
&\leqslant 1-\lim_{i\to\infty}\frac{1}{T_i}\int_0^{T_i}\chi_{V(y,\varepsilon)}(F(x,t))dt \\
&= 1-m(V(y,\varepsilon))<1.
\end{aligned}
$$

这与 $C(X_0)$ 的定义矛盾. 所以 $C(X_0)=M(X_0)$. □

定理 C.2.7 的证明 由引理 C.3.10 可得 (1) $\Leftrightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (3) 首先断言如果 (2) 成立, 则对任意的 $m \in M_x$, 有 $x \in S_m$.

事实上, 对于 $m \in M_x$, 存在实数序列 $\{T_j\}$ 满足 $T_j \to \infty$ 使得 $\delta_{x,T_j} \to m$. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 由引理 C.3.5, 存在 ε_0, $0 < \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon$ 使得 $m(\partial V(x, \varepsilon_0)) = 0$. 因此, 由引理 C.3.8 得到

$$m(V(x,\varepsilon)) \geqslant m(V(x,\varepsilon_0)) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{T_j} \int_0^{T_j} \chi_{V(x,\varepsilon_0)}(F(x,t))dt \geqslant \underline{P_x}(V(x,\varepsilon_0)) > 0.$$

因此, $x \in S_m$. 故断言成立.

对任意的 $m \in M_x$, 由定理 C.2.4 得 $S_m \subseteq C_x$. 反之, 由于 $x \in S_x$ 对任意的 $m \in M_x$, 联系上述断言以及利用 S_m 的不变性和闭性, 得

$$C_x \subseteq \omega(x, F) \subseteq S_m.$$

(3) $\Rightarrow$ (4) 是显然的.

(4) $\Rightarrow$ (2) 设 (4) 成立. 由 $x \in R(F)$ 知, 对任意的 $m \in M_x$, $x \in \omega(x, F) = S_m$. 因此, 对任意的 $\varepsilon > 0$, $m(V(x, \varepsilon)) > 0$. 设 $T_j \to \infty$ 满足

$$\underline{P_x}(V(x,\varepsilon)) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{T_j} \int_0^{T_j} \chi_{V(x,\varepsilon)}(F(x,t))dt.$$

当 $T_j \to \infty$ 时, 设 (如果必要取 $\{T_j\}$ 的子列) $\delta_{x,T_j} \to m \in M_x$. 由引理 C.3.5, 可设 $m(\partial V(x, \varepsilon)) = 0$. 并且引理 C.3.8 蕴涵上述等式的右边等于 $m(V(x, \varepsilon))$. 因此 $\underline{P_x}(V(x, \varepsilon)) > 0$. □

定理 C.2.8 的证明　对于 (1), 注意到 $W_0(F)$ 是 $W(F)$ 中满足 $M_x = \{m_x\}$ 和 $m_x \in E(X, F)$ 的点 x 的集合. 因此 $W_0(F) \subseteq \mathcal{U}_T$. 由定理 C.2.7 (3) 知 $W_0(F) \subseteq \mathcal{U}_D$. 因此 $W_0(F) \subseteq \mathcal{U}_R \cap R(F)$. 另一方面, 由定理 C.2.7, $\mathcal{U}_R \cap R(F) \subseteq W_0(F)$ 是显然的. 因此, $W_0(F) = \mathcal{U}_R \cap R(F)$.

由 (1) 和命题 C.2.2 知 (2) 成立.

对于 (3), 由 $W_0(F) = \mathcal{U}_R \cap R(F)$ 和 $C(F) = \overline{\mathcal{U}_R}$ 可得 $C(F) = \overline{W_0(F)}$. 另一方面, 由定理 C.2.4 可知 $C(F) = M(F)$. 为了证明 (3), 只证 $W(F) \subseteq M(F)$ 即可.

设 $x \in W(F)$ 和 $\varepsilon > 0$. 由命题 C.3.4, 存在 $\delta > 0$ 和 $\Delta t > 0$ 使得如果对任意的 $t \in R$, 有 $F(x, t) \in V(x, \delta)$, 则

$$F(x, (t - \Delta t, t + \Delta t)) \subseteq V(x, \varepsilon).$$

对上述 $\delta > 0$, 存在 $N_\delta > 0$ 使得对每一个正整数 $n > 0$ 存在 $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n < nN_\delta$ 满足 $t_{i+1} - t_i \geqslant 1$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 且 $F(x, t_i) \in V(x, \delta)$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$. 因此

$$F(x, (t_i - \Delta t, t_i + \Delta t)) \subseteq V(x, \varepsilon), \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

另一方面, 存在子列 $n_j \to \infty$ 和 $m \in M_x \subseteq M(X,F)$ 使得

$$\delta_{x,n_jN_\delta} \longrightarrow m.$$

引理 C.3.8 蕴涵

$$\begin{aligned} m(V(x,\varepsilon)) &= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{n_jN_\delta}\int_0^{n_jN_{\delta-1}} \chi_{V(x,\varepsilon)}(F(x,t))dt \\ &\geqslant \lim_{j\to\infty} \frac{1}{n_jN_\delta}\sum_{i=0}^{n_j-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \chi_{V(x,\varepsilon)}(F(x,t))dt \\ &\geqslant \lim_{j\to\infty} \frac{1}{n_jN_\delta}\sum_{i=0}^{n_j-1} 2\Delta t = \frac{2\Delta t}{N_\delta} > 0. \end{aligned}$$

故 $x \in S_m \subseteq M(F)$ 且 $W(F) \subseteq M(F)$. □

定理 C.2.9 的证明 由定理 C.2.8 可直接得 (1) ⇒ (2).

(2) ⇒ (3) 设 $m \in E(X,F)$. 由命题 C.3.3 知存在 $x \in S_m \cap P(F)$ 使得当 $t \to \infty$ 时有 $\delta_{x,t} \to m$. 显然 $S_m = \omega(x,F)$ 是 F 的一个周期轨且 m 是原子的.

(3) ⇒ (1) 设 $x \in W_0(F)\backslash P(F)$. 则当 $t \to \infty$ 时有 $\delta_{x,t} \to m$ 且 $S_m = \omega(x,F)$, 且明显不包含在 $P(F)$ 中. 故 m 不是由 F 的周期轨所生成的. 因而 m 不是原子的, 得出矛盾. 此矛盾蕴涵 (1) 成立. □

定理 C.2.11 的证明 由引理 C.3.11 可直接得 (1) ⇔ (2).

(2) ⇒ (3) 设 $x \notin C_x$. 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $V(x,\varepsilon) \cap V(C_x,\varepsilon) = \varnothing$. 由于 $\overline{P_x}(V(x,\varepsilon)) > 0$, $\underline{P}_x(V(C_x,\varepsilon)) = P_x(C_x,\varepsilon) = 1$, 且 $V(x,\varepsilon) \subseteq X\backslash V(C_x,\varepsilon)$, 所以有

$$\underline{P}_x(V(C_x,\varepsilon)) + \overline{P_x}(X\backslash V(C_x,\varepsilon)) \geqslant \underline{P}_x(V(C_x,\varepsilon)) + \overline{P_x}(V(x,\varepsilon)) > 1.$$

这与引理 C.3.6 矛盾, 因此 $x \in C_x$.

(3) ⇒ (4) 令 $x \in C_x$. 显然 $C_x \subseteq \omega(x,F)$. 由于 x 的轨道在 $\omega(x,F)$ 中稠密且 C_x 对 F 是不变的, 所以有 $C_x = \omega(x,F)$.

由 $C_x = \overline{\bigcup_{m\in M_x} S_m}$ 可得 (4) ⇒ (5).

(5) ⇒ (2) 设 $x \in \omega(x,F) = \overline{\bigcup_{m\in M_x} S_m}$. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $m \in M_x$ 使得 $V(x,\varepsilon) \cap S_m \neq \varnothing$. 由 S_m 的定义, 有 $m(V(x,\varepsilon)) > 0$. 另外, 由引理 C.3.5, 存在 $\delta > 0$ 满足 $\varepsilon \leqslant \delta \leqslant 2\varepsilon$ 使得 $m(\partial V(x,\delta)) = 0$. 选择 $T_j \to \infty$ 使得 $\delta_{x,T_j} \to m$. 由引理 C.3.8, 有

$$\overline{P_x}(V(x,2\varepsilon)) \geqslant \lim_{T_j\to\infty} \frac{1}{T_j}\int_0^{T_j} \chi_{V(x,2\varepsilon)}(F(x,t))dt$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \lim_{T_j\to\infty}\frac{1}{T_j}\int_0^{T_j}\chi_{V(x,\delta)}(F(x,t))dt\\
&=m(V(x,\delta))\geqslant m(V(x,\varepsilon)>0.
\end{aligned}
$$
□

C.5 例　子

本节将举例说明 $A(F)\subset W(F)\subset QW(F)\subset R(F)$ 可以是真包含.

文献 [12] 由定义在环形面的微分方程构造了一个 C^1 流, 其中运动中心等于整个环形面但是极小全局吸引中心却是个单点集. 由 C.2 节的推论 C.2.12 可知 $QW(F)$ 是 $R(F)$ 的真子集. 以下是本节的两个主要结论.

定理 C.5.1　*存在定义在紧致度量空间上的 C^0 流, 其中几乎周期点集是弱几乎周期点集的真子集.*

定理 C.5.2　*存在定义在紧致度量空间上的 C^0 流, 其中弱几乎周期点集是拟弱几乎周期点集的真子集.*

以上两个定理的证明是构造性的. 我们首先在符号空间构造两点, 并利用线性插值方法构造两个流. 与通过与离散系统同纬所得到的流是不同的, 这里所构造的 C^0 流并不会增加基本空间的维数, 更为重要的是, 通过线性插值方法所构造的流具有与离散系统相应的性质.

设

$$
\Sigma_2=\{x=(\cdots x_{-n}\cdots x_{-1}\dot{x}_0x_1\cdots x_n\cdots)\mid x_n\in\{0,1\},\ \forall n\in\mathbb{Z}\},
$$

其中 x_0 上的 "·" 表示第 0 坐标分量的位置. 点 x 和 y 在 Σ_2 中的距离定义为

$$
d(x,y)=\max_{n\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{1}{|n|+1}\mid x_n\neq y_n\right\}. \tag{C.5.1}
$$

设 $A=(a_i\cdots a_j)$ 是一个有限序列满足 $a_k=0$ 或 1 ($i\leqslant k\leqslant j$). 则 $|A|\equiv j-i+1$ 称为 A 的长度. A^{-1} 表示 A 的逆序列, 即 $A^{-1}=(a_j\cdots a_i)$. 如果 $B=(b_m\cdots b_n)$ 也是一个分量为 0 或 1 的有限序列, 定义

$$
AB=(a_i\cdots a_jb_m\cdots b_n).
$$

特别地, 对正整数 n, 用 O_n 表示由 n 个分量为 0 构成的有限序列 $(0\cdots0)$. 对任意的 $x=(\cdots x_{-n}\cdots x_{-1}\dot{x}_0x_1\cdots x_n\cdots)\in\Sigma_2$ 和任意 $m<n$, 定义

$$
x_{[m,n]}\equiv(x_m\cdots x_n).
$$

称 $x_{[-n,n]}$ 是 x 的 $(2n+1)$ 中心子序列.

构造 I　设 $P_0=(11111111)$, 则 $|P_0|=2^3$. 用归纳法构造 P_k. 设

$$P_1 = Q_0 O_5,$$

其中 $Q_0 = (111)$. 则 $|P_1| = 2^3$. 设

$$P_2 = Q_1(0\cdots 0),$$

其中 $Q_1 = Q_0 O_1 X_3$, X_3 是 $P_1 P_0(1) P_0 P_1$ 的 3 中心子序列, 并且在上述等式中 Q_1 后的 $(0\cdots 0)$ 的长度是确定的, 因此 $|P_2| = 2^4$.

设 $P_0, \cdots, P_i$ 且对某个 $i \geqslant 2$, $Q_0, \cdots, Q_{i-1}$ 已定义. 设

$$P_{i+1} = Q_i(0\cdots 0),$$

其中 $Q_i = Q_{i-1}\cdots Q_0 O_i X_{2i+1}$, X_{2i+1} 是 $P_i \cdots P_0(1) P_0 \cdots P_i$ 的 $(2i+1)$ 中心子序列 (因为 $|P_i \cdots P_0(1) P_0 \cdots P_i| \geqslant 2i+1$, 所以这是可能的), 且上述等式中 Q_i 后的 $(0\cdots 0)$ 的长度确定, 所以 $|P_{i+1}| = 2^{i+3}$.

由归纳法易证

$$|Q_i| = 5 \cdot 2^i - 3, \quad \forall i > 0,$$

且 P_{i+1} 中 Q_i 后的 $(0\cdots 0)$ 的长度是

$$2^{i+3} - (5 \cdot 2^i - 3) = 3 \cdot 2^i + 3, \quad \forall i > 0.$$

定义

$$q = (\cdots x_{-n} \cdots x_{-1} \dot{x}_0 x_1 \cdots x_n \cdots) = (\cdots P_i \cdots P_0 \dot{1} P_0 \cdots P_i \cdots) \in \Sigma_2. \tag{C.5.2}$$

命题 C.5.3 对任意的 $k \geqslant 1$ 和 $m \geqslant 0$, Q_{k+m} 至少包含 2^m 个 X_{2k+1}.

证明 由 Q_k 的定义直接得到. □

定义 C.5.4 设 A 和 T_k 由 0 和 1 组成的两个有限序列满足 $|T_k| = k > 0$. 如果存在正整数 $N_k > 0$(其为 $|A|$ 的一个因子), 使得对 $i = 1, \cdots, |A|/N_k$, T_k 在 A 的前 iN_k 个分量中至少出现 i 次, 则称 A 对于 T_k 关于 N_k 满足 "W" 条件.

命题 C.5.5 设 $k \geqslant 1$ 和 $A_1 = P_0 \cdots P_k P_{k+1}$, $A_m = P_{m+k}$ $(m \geqslant 2)$. 则

$$q = (\cdots A_m \cdots A_2 A_1' \dot{1} A_1 A_2 \cdots A_m \cdots), \tag{C.5.3}$$

其中

$$A_1' = P_{k+1} P_k \cdots P_0.$$

进而, 对任意的 $m \geqslant 2$, A_m 对于 X_{2k+1} 关于 $N_k = 2^{k+4}$ 满足 "W" 条件.

证明 由于 $|A_1| = 2^3 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{k+3} = 2^{k+4} = N_k$, 且由命题 C.5.3 知, A_1 至少包含一个 X_{2k+1}. 因此 A_1 对于 X_{2k+1} 关于 N_k 满足 "W" 条件. 类似地, 可得 A_2 对于 X_{2k+1} 关于 N_k 也满足 "W" 条件.

对于 $m \geqslant 3$, 下设 $A_3, \cdots, A_{m-1}$ 对于 X_{2k+1} 关于 N_k 都满足 "W" 条件. 有

$$\frac{|A_m|}{N_k} = \frac{|P_{k+m}|}{N_k} = \frac{2^{k+m+2}}{2^{k+4}} = 2^{m-2},$$

$$A_m = Q_{k+m-1}O_{3\cdot 2^{k+m-1}+3} = Q_{k+m-2}\cdots Q_0 O_{k+m-1} X_{2(k+m-1)+1} O_{3\cdot 2^{k+m-1}+3}$$

且

$$A_{m-1} = P_{k+m-1} = Q_{k+m-2}O_{3\cdot 2^{k+m-2}+3}.$$

由命题 C.5.3, X_{2k+1} 在 Q_{k+m-2} 中至少出现 2^{m-2} 次, 因此 A_m 对于 X_{2k+1} 关于 N_k 都满足 "W" 条件. □

构造 II　设 $P_{00} = (10)$. 归纳定义 P_{kk}.

对 $0 < i \leqslant k$, 假设 $P_{(k-1)(i-1)}$ 已定义. 设

$$P_{k0} = P_{(k-1)(k-1)}O_m,$$

其中 $m = |P_{(k-1)(k-1)}|^2$, 并且在

$$P_{ki} = P_{(k)(i-1)}X_{2i+1}\cdots X_{2i+1}$$

中, $P_{(k)(i-1)}$ 后有 $|P_{(k)(i-1)}|^2$ 个 X_{2i+1}, 其中 X_{2i+1} 是 $P^{-1}_{(i-1)(i-1)}(1)P_{(i-1)(i-1)}$ 的 $(2i+1)$ 中心子序列. 易见 $|P^{-1}_{(i-1)(i-1)}(1)P_{(i-1)(i-1)}| \geqslant 2i+1$. 这里 P^{-1} 是 P 的逆序列.

下面定义符号序列

$$q_n = (\cdots 0P^{-1}_{nn}\dot{1}P_{nn}0\cdots).$$

因为 $P^{-1}_{nn}\dot{1}P_{nn}$ 的 $2|P_{(n-1)(n-1)}|+1$ 中心序列正好是 $P^{-1}_{(n-1)(n-1)}\dot{1}P_{(n-1)(n-1)}$, 所以 $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 (Σ_2, d) 中的一个 Cauchy 列. 令

$$q = \lim_{n\to\infty} q_n. \tag{C.5.4}$$

由 P_{nn} 的构造可知, 下列命题的证明可直接得到.

命题 C.5.6　(1) 对任意的 $0 \leqslant i \leqslant k$, $k = 0, 1, \cdots$, 有 $|P_{(k+1)0}| = |P_{kk}| + |P_{kk}|^2$ 且 $|P_{ki}| = |P_{k(i-1)}| + (2i+1)|P_{k(i-1)}|^2$.

(2) 对任意的 $0 \leqslant i \leqslant k$ 和 $k = 0, 1, \cdots$, $q = (\cdots q_{-2}q_{-1}\dot{1}q_1q_2\cdots)$ 的有限子序列 $(q_1q_2\cdots q_m)$ 正好就是 P_{ki}, 其中 $m = |P_{ki}|$.

用 $C(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的连续函数的集合. $C(\mathbb{R})$ 上的距离定义为

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{-\infty < x < +\infty} \min\left\{|\varphi(x) - \psi(x)|,\ \frac{1}{|x|}\right\}.$$

易证 $(C(\mathbb{R}),\rho)$ 是一个可分完备的度量空间, 且 $\rho(\varphi,\psi)<\varepsilon$ 等价于当 $|x|\leqslant\dfrac{1}{\varepsilon}$ 时,

$$|\varphi(x)-\psi(x)|<\varepsilon. \tag{C.5.5}$$

定义转移映射:

$$F: C(\mathbb{R})\longrightarrow C(\mathbb{R}),$$
$$F(\varphi,t)(x)=\varphi(x+t).$$

则 F 是 $C(\mathbb{R})$ 上的一个 C^0 流 (见文献 [43] 的第 6 章). 现定义 $(C(\mathbb{R}),F)$ 的两个紧致子系统使得它们分别满足定理 C.5.1 和定理 C.5.2 的性质.

定义 $\varphi\in C(\mathbb{R})$ 使得 $\varphi(n)=x_n$, 其中 $q=(\cdots x_{-n}\cdots x_{-1}x_0x_1\cdots x_n\cdots)$ (见 (C.5.2)). 对于非整数值 x, 如果对于 n, $n<x<n+1$, 定义

$$\varphi(x)=(\varphi(n+1)-\varphi(n))(x-n)+\varphi(n).$$

则函数 $\varphi(x)$ 满足

$$|\varphi(x)|\leqslant 1,\quad |\varphi(x')-\varphi(x'')|\leqslant 2|x'-x''|,$$

并且 $\varphi(x)$ 有界且在 $(-\infty,+\infty)$ 上等度连续. 因此 $p=\varphi(x)$ 的轨道 $\{F(p,t)\}_{-\infty<t<+\infty}$ 是 Langrand 稳定的, 即 $F(p,\mathbb{R})$ 的闭包是 $C(\mathbb{R})$ 的一个紧子集. 进而, 由 $\varphi(x)$ 的构造可得, 对任意的 $i>0$, $\varphi([-i,i])$ 在 $\varphi(\mathbb{R})$ 中出现无限多次. 因此, φ 是 F 的一个双边回复点并且

$$L(p,F)=\omega(p,F)=\alpha(p,F)=\overline{F(p,\mathbb{R})}.$$

其中 $\omega(p,F)$ 和 $\alpha(p,F)$ 分别是 F 在点 p 处的 ω 极限集和 α 极限集, 而 $L(p,F)=\omega(p,F)\cup\alpha(p,F)$ 是 F 在点 p 处的极限集.

现考虑 C^0 流

$$F|_{L(p,F)}:\quad L(p,F)\longrightarrow L(p,F).$$

要证定理 C.5.1, 只证下列 (a), (b) 即可.

(a) $p\notin A(F|_{L(p,F)})$;

(b) $p\in W(F|_{L(p,F)})$.

由于当 $i\to\infty$, $|O_{3\cdot 2^i+3}|\to\infty$, 由 p 的构造易见 $0\in L(p,F)$ 是 F 的一个不动点, 故 $L(p,F)$ 不是极小的. 因此, 由文献 [43] 的第 5 章的定理 28 知, p 不是 F 的几乎周期点.

对于 (b), 由等式 (C.5.2) 可知, 对任意正整数 k, 存在正整数 l 使得对 $[-k,k]$ 中的任意整数 i, 有 $p(i)=p(i+l)$. 因此

$$\rho(p,F(p,l))<\frac{1}{k}.$$

对任意 $1>\varepsilon>0$, 存在整数 k 使得 $1/(k+1)\leqslant\varepsilon<1/k$. 令 $N_k=2^{k+4}$, 则对任意正整数 n, 由命题 C.5.5 知, 序列

$$A_1A_2\cdots A_n$$

对 X_{2k+1} 关于 N_k 满足 "W" 条件. 也就是说, $A_1A_2\cdots A_n$ 的前 iN_k 个分量至少包含 i 个 X_{2k+1}, $i=1,\cdots,|A_1A_2\cdots A_n|/N_k$. 因此, 对 $i=-k,\cdots,-1,0,1,\cdots,k$ 和 $j=1,\cdots,n$, 对任意正整数 n 存在整数 $0\leqslant t_0<t_1<\cdots t_n<nN_k$ 使得 $p(i)=p(i+t_j)$ 等于 X_{2k+1} 的第 i 个分量. 因此 $F(p,t_j)\in V(p,\varepsilon)$ 且 $p\in W^+(F|_{L(p,F)})$. 同样可得 $p\in W^-(F|_{L(p,F)})$. 因此, $p\in W(F|_{L(p,F)})$, 定理 C.5.1 证完. □

注记 C.5.7　对上述定义的子系统, 可证

$$\overline{A(F|_{L(p,F)})}\neq W(F|_{L(p,F)}).$$

这蕴涵一个弱几乎周期点可以不包含在几乎周期点的闭包之中.

最后, 证明定理 C.5.2. 对任意的整数 n, 在 $C^0(\mathbb{R})$ 上定义函数 φ 如下: $\varphi(n)=q_n$, 其中

$$q=(\cdots q_{-n}\cdots q_{-1}q_0q_1\cdots q_n\cdots),$$

见 (C.5.4). 对非整数值 x, 类似于定理 C.5.1 的证明, 由线性插值法定义 $\varphi(x)$. 从 q 的构造易见关于初始值 $p=\varphi(x)$ 的流

$$F(p,t)(x)=\varphi(x+t),$$

是 Langrand 稳定的, 且 $p\in R(F)$.

考虑动力系统 $(\omega(p,F),F)$. 下列结论易于验证:

(1) 因为 $\varphi(0)=1$ 和 $\varphi(0+t)=0$, 所以对这 $|P_{kk}|^2$ 个整数 $t=|P_{kk}|,|P_{kk}|+1,\cdots,|P_{(k+1)0}|$ 中的每一个, 有

$$\rho(p,F(p,t))\geqslant 1.$$

(2) 对这 $|P_{k(i-1)}|^2$ 个整数 $t=|P_{k(i-1)}|+i,|P_{k(i-1)}|+3i,|P_{k(i-1)}|+5i,\cdots,|P_{ki}|-i$ 中的每一个, 由于当 $|x|\leqslant i$ 时, $\varphi(x)=\varphi(x+t)$, 所以有

$$\rho(p,F(p,t))\leqslant\frac{1}{i}\quad(0<i\leqslant k).$$

(3) 如果存在 $t_0>0$ 使得 $\rho(p,F(p,t_0))\geqslant 1$, 则对任意满足 $|t-t_0|\leqslant 1/2$ 的 t, 有 $\rho(p,F(p,t))\geqslant 1/2$.

对 $k=0,1,\cdots$, 取 $\varepsilon_0=1/2$ 和 $T_k=n_k=|P_{(k+1)0}|$. 由上述结论 (1), (3) 和命题 C.5.6 (2) 可得, 当 $k\to\infty$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{T_k}\int_0^{T_k}\chi_{V(p,\varepsilon_0)}(F(p,t))dt\\
=&\frac{1}{|P_{(k+1)0}|}\left(\int_0^{|P_{kk}|}(F(p,t))dt+\sum_{j=|P_{kk}|}^{|P_{(k+1)0}|-1}\int_j^{j+1}\chi_{V(p,\varepsilon_0)}(F(p,t))dt\right)\\
\leqslant&\frac{|P_{(k+1)0}|-|P_{kk}|}{|P_{(k+1)0}|}\\
=&\frac{|P_{kk}|}{|P_{kk}|+|P_{kk}|^2}\to 0.
\end{aligned}
$$

因此 $\underline{P}_p(V(p,\varepsilon_0))=0$ 且由定理 C.2.8 知 $p\notin W_+(F)$.

另一方面, 对任意的 $\varepsilon>0$, 令 $\delta>0$ 和 $\Delta t>0$ 满足命题 C.3.4 的条件. 对上述 $\delta>0$, 选择 $N>0$ 使得 $1/N\leqslant\delta$. 对 $k\geqslant N$, 令 $T_k=n_k=|P_{kN}|$. 由结论 (2) 和命题 C.3.4 得, 当 $k\to\infty$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|P_{kN}|}\int_0^{|P_{kN}|}\chi_{V(p,\varepsilon)}(F(p,t))dt\geqslant&\frac{2\Delta t|P_{k(N-1)}|^2}{|P_{kN}|}\\
=&\frac{2\Delta t|P_{k(N-1)}|^2}{|P_{k(N-1)}|+2(N+1)|P_{k(N-1)}|^2}\to\frac{\Delta t}{N}.
\end{aligned}
$$

这蕴涵对所有的 $\varepsilon>0$, $\overline{P}_p(V(p,\varepsilon))>0$. 因此由定理 C.2.11 知 $p\in QW_+(F)$. 同样可证 $p\in QW_-(F)$. 因此 $p\in QW(F)$. 这样我们证明了定理 C.5.2. □

参考文献

[1] Adler R L, Konhein A G, McAndrew M H. Topological entropy. TAMS, 1965, 114: 309–319.

[2] Bank J, Brooks J, Gairns G, Davis G, Stacey D. On Davanney's Definition of Chaos. The Amer. Math. Moonthly, 1992, 99(4): 332–334.

[3] Birkhoff G. Dynamical systems, Colloquium publication, IX. Amenrican Mathematical Society. Provindence: Rhode Island, 1927.

[4] Birkhoff G. Proof of the ergodic theroem. Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 1931, 17: 656–660.

[5] Block L. Noncontinuity of topological entropy of maps of the cantor set and the interval. PAMS., 1975, 50: 388–393.

[6] Block L. Mappings of interval with finitely many periodic points have zero entropy. PAMS, 1977, 67: 357–361.

[7] Block L. Continuous maps of the interval with finite nonwandering set. TAMS, 1978, 240: 221–230.

[8] Block L. Homoclinic points of mappings of the interval. PAMS, 1978, 72(3): 576–580.

[9] Block L. Simple periodic orbits of mappings of the interval. TAMS, 1979, 254: 391–398.

[10] Block L. Periodic points of continuous mappings of the circle. TAMS, 1982, 260: 553–562.

[11] Block L, Coppel W A. Dynamics in one dimension. Lecture Notes in Mathematics, 1513. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

[12] Block L, Guckenheimer L, Misiurewicz M, Lai Soung Young. Periodic points and topological entropy. Lecture Notes in Math., 1980, 819: 18–34.

[13] Blokh A M. Limit behavior of one dimensional dynamics systems. Uspehi Mat. Nauk, 1982, 37(1): 137–138.

[14] Bowen R. Entropy for group endomorphisms and homogenneous spaces. TAMS, 1971, 153: 401–414.

[15] Bowen R. Topological Entropy and Axiom A, Global Analysis. Proceedings of Symposia in Mathematics, 1970, 14: 23–41.

[16] Bowen R, Franks J. The periodic points of maps of the disk and interval. Topology, 1976, 15: 337–342.

[17] 代雄平, 周作领, 耿祥义. Some relations between Hausdorff-dimensions and entropies. Science in China, Seriers A, 1998, 41: 1068–1075.

[18] Denker M, Grillenberger C, Sigmund K. Ergodic Theory on Compact Spaces. Lecture Notes in Mathematics, 527. Berlin Heidelberg, NewYork: Springer-Verlag, 1976.

[19] Devaney R L. An Introduction to Chaos Dynamical Systems (Second Edition). Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989.

[20] Falconer K J. The geometry of fractal sets. Cambridge University Press, 1985.

[21] 冯力. 异状点集为空的线段自映射. 暨南理医学报, 1984, 3: 10–14.

[22] Gottaschalk W H. Orbit-closure decomposition and almost periodic properties. Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 50: 915–919.

[23] Gottaschalk W H, Hedlund G. Topological Dynamics. Amar. Math. Soc., Providence, 1955.

[24] Hahn F J, Katznelson Y. On the entropy of uniquely ergodic transformations. TAMS., 1967, 126: 335–360.

[25] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis. Cambridge University Press, 1985.

[26] Hahn F J, Katznelson Y. On the entropy of uniquely ergodic transformations. TAMS., 1967, 126: 335–360.

[27] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis. Cambridge University Press, 1985.

[28] 黄文, 叶向东. A local variational relation and applications. Israel Journal of Mathematics, 2006, 151: 237–279.

[29] Huang Yu, Zhou Zuoling. Two new recurrent levels for C^0 flows, 2011 (to appear).

[30] 江泽涵. 不动点类理论. 北京：科学出版社, 1979.

[31] 江泽涵. 拓扑学引论. 上海：上海科学技术出版社, 1978.

[32] Kelley J L. general Topology. New York: Splinger-Verlag, 1955.

[33] Kryloff N, Bogoliuboff N. La theorie generale de la measure et son application a l'etude des systemes dynamique de la mechanique non lineaire. Ann. of math., 1937, 38: 65–113.

[34] 李天岩, Yorke J M. Period three implies chaos. Amer. Math. Monthly, 1975, 82: 985–992.

[35] 廖山涛. 紧致微分流形上常微分方程系统的某类诸态备经性质. 北京大学学报 (自然科学), 1963, 9: 24–265, (续) 309–324.

[36] 廖山涛. 常微系统的一个诸态备经性质定理. 中国科学, 1973, 1: 1–20.

[37] 廖山涛, 刘旺金. 同伦论基础. 北京：北京大学出版社, 1980.

[38] 麦结华. 3- 周期轨道蕴涵 6831726876986508 个 85- 周期轨道. 中国科学, 1991, 9: 929–937.

[39] 麦结华. 圆周自映射的一些动力系统性质及其等价条件. 数学进展, 1997, 26(3): 193–210.

[40] Misiurewicz M. Horseshoe for mappings of the interval. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser.

Sci. Math., 1979, 27(2): 167–169.

[41] Misiurewicz M. Invariant measures for continuous transformations of [0, 1] with zero topological entropy. Ergodic Theory. Lecture Notes in Math., 1976, 720: 144–152.

[42] Misiurewicz M. A short proof of the variational priciple for a $\mathbb{Z}_+$ action on a compact space. Int. Conf.Dyn. Systems in Math. Physics. Societe Mathematique de France, 1976. Asterisque, 40: 147–158.

[43] 涅梅茨基, 斯捷巴诺夫. 微分方程定性论 (中译本). 科学出版社, 1959.

[44] Oxtoby J C. Ergodic sets. BAMS., 1952, 58: 116–136.

[45] Poincaré H. Les methodes nouvelles de la mecanique celeste, 3. Paris Gauthier-Villars, 1899.

[46] Sharkovskii A N. Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself. Ukrain. Mat. Z., 1964, 16: 61–71.

[47] Stefan P. A theorem of Sarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line. Comm. Math. Phys., 1977, 54: 237–248.

[48] Sun Wenxiang. Topological entropy and the complete invariant for expensive maps. Nonlinearity, 2000, 13: 663–673.

[49] 孙文祥. 遍历论. 北京: 北京大学出版社 (即将出版).

[50] Walters P. An introduction to ergodic theory, Graduate Texts in Mathematics, 79. New York-Berlin: Springer-Verlag, 1982.

[51] 叶向东, 黄文, 邵松. 拓扑动力系统概论, 北京: 科学出版社, 2008.

[52] 熊金城. 点集拓扑讲义. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[53] 熊金城. 关于拓扑熵的一点注记. 科学通报, 1988, 33(20): 1534–1536.

[54] 熊金城. $\Omega(f|_{\Omega(f)}) = \overline{P(f)}$ for every continuous self-map of the interval. Kexue Tongbao, 1983, 28(1): 21–23.

[55] Young L S. On the prevalence of hoeseshoes. TAMS, 1981, 263(1): 75–88.

[56] 张景中, 熊金城. 迭代函数与一维动力系统. 成都: 四川科技教育出版社. 1992.

[57] 周作领. 符号动力系统. 上海: 上海科技教育出版社, 1997.

[58] 周作领. 一维动力系统. 数学季刊, 1988, 3: 42–65.

[59] 周作领. A necessary and sufficient condition for finiteness of non-wandering set of mappings of the interval. Chin. Ann. of Math. (in Chinese), 1982, 3(1): 121–130.

[60] 周作领, 刘旺金. A necessary and sufficient condition for the existence of homoclinic points of self-mappings of the interval. Advances in Math. (in Chinese), 1982, 11(1): 58–73.

[61] 周作领, 刘旺金. A sufficient condition for vanishing of the topological entropy of self-mappings of the interval. IBID (in Chinese), 1982, 11(3): 216–219.

[62] 周作领. A sufficient condition for the non-wandering set to coincide with the set of periodic pints of self-mappings of the interval. Acta Mathematica Sinica(in Chinese),

1982, 25(1): 122–128.

[63] 周作领. A necessary and sufficient condition for $\Omega(f) = P(f)$ of self-mappings of the interval. Kexue Tongbao, 1982, 27(2): 235.

[64] 周作领. 无异状点的线段自映射. 数学学报, 1982, 25(5): 633–640.

[65] 周作领. 无异状点的线段自映射 (II)— 中心和深度. 数学年刊, 1983, 4A(6): 731–736.

[66] 周作领. A class of self-mappings the circle. Kexue Tongbao, 1983, 28(12): 1580–1582.

[67] 周作领. Some properties on topological entropy of self-mappings of the polyhedron. Scienca in China, Series A, 1984, 27(2): 151–156.

[68] 周作领. A generic property of self-mappings of the interval. Acta Mathematica Sinica(in Chinese), 1984, 27(4): 532–535.

[69] 周作领. Self-mappings of the circle without periodic point. IBID, 1987, 30(4): 253–257.

[70] 周作领. Self-mappings of the circle with periodic point. IBID, 1985, 28(3): 360–371.

[71] 周作领. The set of periodic points of self-mappings of the interval. Chin. Sci. Bull. IBID, 1986, 29(2): 139.

[72] 周作领. A proof of small conjecture on topological entropy. Scientia Sinica, Series A, 1986, 29(3): 254–264.

[73] 周作领. A note on the Li-Yorke's theorem. Kexue Tongbao, 1986, 31(1): 1–3.

[74] 周作领. Chaos and total chaos. IBID, 1988, 33(18): 1491–1493.

[75] 周作领. Self-mappings of the circle without periodic points. Acta Mathematica Sinica (in Chinese), 1987, 30(4): 523–527.

[76] 周作领. The chaotic behavior of the one sided shift. IBID, 1987, 30(2): 284–288.

[77] 周作领. The chaotic behavior of the two sided shift. Chin. Ann. of Math. (in Chinese), 1987, 8A(6): 677–681.

[78] 周作领. Chaos and topological entropy. (in Chinese), 1988, 31(1): 83–87.

[79] 周作领. Self-mappings Ω-explosion. Kexue Tongbao, 1988, 31(1): 1–3.

[80] 周作领. The topological Markov chain. Chin. Ann. of Math, New Series, 1988, 9(5): 604–608.

[81] 周作领. The topological Markov chain—non-wandering set and topological entropy. Chin. Ann. of Math., Series A (in Chinese), 1988, 9A(5): 604–608.

[82] 周作领. Some results on one dimensional maps. Proceedings of 1983 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations. Beijing: Science Press, 1986.

[83] 周作领. The estimation for topological entropy. Kexue Tongbao (in Chinese), 1988, 33(19): 1659.

[84] 周作领. Locally triangulable space and topological entropy. IBID, 1990, 35(15): 1317.

[85] 周作领. Some results on topological Markov chain, a talk. AMS Centennial Celebration, Providence, USA, 1988, see Abstracts of papers presented to the AMS, 9(4).

[86] 周作领. Locally triangulable and Quasi-horseshoe maps, a talk. Asian Mathematical Conference, Hong Kong, 1990: Proceedings of Asian Mathematical Conference. World Scientific, 1992.

[87] 周作领. Chaos, topological entropy and measure centre, a talk. International Congress of Mathematicians, Kyoto, Japan, 1990.

[88] 周作领. The levels of the set of recurrent points, topological entropy and chaos for self-maps of the interval, a talk. International Conference on Dynamical Systems and related Topics, Nagoya, Japan, 1990; Advanced Series in Dynamical Systems, V. 9, World Scientific.

[89] 周作领. Some equivalent conditions for self-maps of the circle. Chin. Ann. of Math. (in Chinese), Series A, 1991, 12; MR 92g: 58075.

[90] 周作领. Shifts and subshifts. Chin. Quart. J. of math. (in Chinese), 1991, 6(2): 44–55.

[91] 周作领. A theorem on ergodic measure and its application. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyataeny, 1991, 30(3): 14–17. (with Chung Shung).

[92] 周作领. A note on Misuiwicz' theorem. Chin. Quart. J. of Math., 1992, 7(2): 12–15.

[93] 周作领. Weakly almost periodic point and ergodic measure. Chin. Ann. of Math., Series B, 1992, 13(2): 137–142.

[94] 周作领. Weakly almost periodic point and measure centre. Science in China. Series A, 1993, 36(2): 142–153.

[95] 周作领. Measure centre and minimal centre of attraction. Chinese Bulletin, 1993, 38(7): 542–545.

[96] 周作领, 肖金生. Criterions and algorithms for irreducibility and aperiodicity of non-negative matrices. IBID, 1992, 37(24): 2029–2031.

[97] 周作领. The weakly almost periodic point for a flow. Advanced Progress in Natural Science (in Chinese), 1994, 4(5): 603–606.

[98] 周作领. The level of the orbit's topological structure for a –flow, a talk. International Congress of Mathematicians, 3/8/1994–11/8/1994. Zurich, Swizerland.

[99] 周作领. The ergodic approach in studying a dynamical system. Advanced Progress in Natural Science, 1995, 5(4): 390–396.

[100] 周作领, 何伟弘. The level of the orbit's topological structure and the topological semi-conjugacy. Science in China, Series A, 1995, 25(5): 457–464.

[101] 周作领, 廖公夫, 王兰宇. The positive topological entropy not equivalent to chaos-a class of subshifts. Science in China, Series A, 1994, 24(3): 256–261.

[102] 周作领, 廖公夫, 王兰宇. A compact system (X, f) with $\Omega(f) \neq M(f)$. Acta Mathematica Sinica(in Chinese), 1995, 38(4): 512–517.

[103] 周作领, 何伟弘. Uniformly almost periodic points. Chinese Science Bulletin, 1996, 41(22): 2024–2026.

[104] 周作领, 冯力. Twelve open problems on the exact value of the Hausdorff measure and on topological entropy: A brief survey of recent results. Nonlinearity, 2004, 17: 493–502.

[105] Akin E. The General Topology of Dynamical Systems. Graduate Studies in Mathematics. Amer. Math. Soc., Providence, 1993, 1.

[106] Cornfeld I P, Fomin S V and Sinai Ya G. Ergodic Theory. New York: Springer-Verlag, 1982.

[107] Dai X. Weakly Birkhoff recurrent switching signal, almost sure and partial stability of linear switched dynamical systems. J. Differential Equations, 2011, 250: 3584–3629.

[108] Dai X, Huang Yu and Xiao Mingqing. Pointwise stabilization of discrete-time matrix-valued stationary Markov chains, preprint, 2011.

[109] Furstenberg H. Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory. Princeton: Princeton Univ. Press, 1981.

[110] Gottschalk W H. Almost periodic point with respect to transformation semi-group. Annals of Math., 1946, 47(4): 762–766.

[111] Hurley M. Attractors: Persistence and density of their basins. Trans. Amer. Math. Soc., 1982, 269: 247–271.

[112] Knight R. A characterization of recurrent motions. Bull. Austral. Math. Soc., 1983, 28: 1–4.

[113] Mañé R. Ergodic Theory and Differentiable Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

[114] Milnor J. On the concept of attractor. Comm. Math. Phys., 1985, 99(2): 177–195.

[115] Milnor J. Correction and remarks, "On the Concept of Attractor". Comm. Math. Phys., 1985, 99(3): 517–519.

索 引

(以词头拼音字典顺序排列)

Y

Z

《现代数学基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1 数理逻辑基础(上册) 1981.1 胡世华 陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙 吕以辇 陈志华 著
3 组合论(上册) 1981.10 柯 召 魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭 方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧 刘秀芳 著
7 数理逻辑基础(下册) 1982. 8 胡世华 陆钟万 著
8 群构造(上册) 1982.11 张远达 著
9 有限群构造(下册) 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬 丁同仁 黄文灶 董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔 邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论(上册) 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论(上册) 1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论(下册) 1987.12 柯 召 魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李 忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著
29 同调代数 1988.2 周伯壎 著

30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著
31 带有时滞的动力系统的稳定性 1989.10 秦元勋等 编著
32 代数拓扑与示性类 1989.11 马德森著 吴英青 段海鲍译
33 非线性发展方程 1989.12 李大潜 陈韵梅 著
34 反应扩散方程引论 1990.2 叶其孝等 著
35 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行等 编
36 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
37 解析数论基础 1991.2 潘承洞等 著
38 拓扑群引论 1991.3 黎景辉 冯绪宁 著
39 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙 吴兰成 著
40 黎曼曲面 1991.4 吕以辇 张学莲 著
41 线性偏微分算子引论(下册) 1992.1 齐民友 著
42 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
43 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
44 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录等 著
45 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰等 著
46 线性微分方程的非线性扰动 1994.2 徐登洲 马如云 著
47 广义哈密顿系统理论及其应用 1994.12 李继彬 赵晓华 刘正荣 著
48 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
49 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 著
50 复解析动力系统 1995.10 吕以辇 著
51 组合矩阵论 1996.3 柳柏濂 著
52 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英 李 冲 杨文善 著
53 有限典型群子空间轨道生成的格 1997.6 万哲先 霍元极 著
54 实分析导论 1998.2 丁传松等 著
55 对称性分岔理论基础 1998.3 唐 云 著
56 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
57 半群的 S-系理论 1999.2 刘仲奎 著
58 有限群导引(下册) 1999.5 徐明曜等 著
59 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
60 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
61 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
62 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著
63 调和分析及其在偏微分方程中的应用 1999.10 苗长兴 著

64 惯性流形与近似惯性流形 2000.1 戴正德 郭柏灵 著
65 数学规划导论 2000.6 徐增堃 著
66 拓扑空间中的反例 2000.6 汪 林 杨富春 编著
67 拓扑空间论 2000.7 高国士 著
68 非经典数理逻辑与近似推理 2000.9 王国俊 著
69 序半群引论 2001.1 谢祥云 著
70 动力系统的定性与分支理论 2001.2 罗定军 张 祥 董梅芳 编著
71 随机分析学基础(第二版) 2001.3 黄志远 著
72 非线性动力系统分析引论 2001.9 盛昭瀚 马军海 著
73 高斯过程的样本轨道性质 2001.11 林正炎 陆传荣 张立新 著
74 数组合地图论 2001.11 刘彦佩 著
75 光滑映射的奇点理论 2002.1 李养成 著
76 动力系统的周期解与分支理论 2002.4 韩茂安 著
77 神经动力学模型方法和应用 2002.4 阮炯 顾凡及 蔡志杰 编著
78 同调论——代数拓扑之一 2002.7 沈信耀 著
79 金兹堡-朗道方程 2002.8 郭柏灵等 著
80 排队论基础 2002.10 孙荣恒 李建平 著
81 算子代数上线性映射引论 2002.12 侯晋川 崔建莲 著
82 微分方法中的变分方法 2003.2 陆文端 著
83 周期小波及其应用 2003.3 彭思龙 李登峰 谌秋辉 著
84 集值分析 2003.8 李 雷 吴从炘 著
85 数理逻辑引论与归结原理 2003.8 王国俊 著
86 强偏差定理与分析方法 2003.8 刘 文 著
87 椭圆与抛物型方程引论 2003.9 伍卓群 尹景学 王春朋 著
88 有限典型群子空间轨道生成的格(第二版) 2003.10 万哲先 霍元极 著
89 调和分析及其在偏微分方程中的应用(第二版) 2004.3 苗长兴 著
90 稳定性和单纯性理论 2004.6 史念东 著
91 发展方程数值计算方法 2004.6 黄明游 编著
92 传染病动力学的数学建模与研究 2004.8 马知恩 周义仓 王稳地 靳 祯 著
93 模李超代数 2004.9 张永正 刘文德 著
94 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 2005.1 王玉文 著
95 巴拿赫空间结构和算子理想 2005.3 钟怀杰 著
96 脉冲微分系统引论 2005.3 傅希林 闫宝强 刘衍胜 著
97 代数学中的 Frobenius 结构 2005.7 汪明义 著

98 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
99 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
100 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
101 代数群引论 2006.9 黎景辉 陈志杰 赵春来 著
102 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤 霍元极 麻常利 著
103 椭圆曲线公钥密码导引 2006.10 祝跃飞 张亚娟 著
104 凝固过程动力学与交界面稳定性引论 2006.12 徐鉴君 著
105 椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现 2006.12 王学理 裴定一 著
106 非线性演化方程的稳定性与分歧 2007.4 马 天 汪宁宏 著
107 正规族理论及其应用 2007.4 顾永兴 庞学诚 方明亮 著
108 组合网络理论 2007.5 徐俊明 著
109 矩阵的半张量积:理论与应用 2007.5 程代展 齐洪胜 著
110 鞅与 Banach 空间几何学 2007.5 刘培德 著
111 非线性常微分方程边值问题 2007.6 葛渭高 著
112 戴维-斯特瓦尔松方程 2007.5 戴正德 蒋慕蓉 李栋龙 著
113 广义哈密顿系统理论及其应用 2007.7 李继彬 赵晓华 刘正荣 著
114 Adams 谱序列和球面稳定同伦群 2007.7 林金坤 著
115 矩阵理论及其应用 2007.8 陈公宁 著
116 集值随机过程引论 2007.8 张文修 李寿梅 汪振鹏 高 勇 著
117 偏微分方程的调和分析方法 2008.1 苗长兴 张 波 著
118 拓扑动力系统概论 2008.1 叶向东 黄 文 邵 松 著
119 线性微分方程的非线性扰动(第二版) 2008.3 徐登洲 马如云 著
120 数组合地图论(第二版) 2008.3 刘彦佩 著
121 半群的 S-系理论(第二版) 2008.3 刘仲奎 乔虎生 著
122 巴拿赫空间引论(第二版) 2008.4 定光桂 著
123 拓扑空间论(第二版) 2008.4 高国士 著
124 非经典数理逻辑与近似推理(第二版) 2008.5 王国俊 著
125 非参数蒙特卡罗检验及其应用 2008.8 朱力行 许王莉 著
126 Camassa-Holm 方程 2008.8 郭柏灵 田立新 杨灵娥 殷朝阳 著
127 环与代数(第二版) 2009.1 刘绍学 郭晋云 朱 彬 韩 阳 著
128 泛函微分方程的相空间理论及应用 2009.4 王 克 范 猛 著
129 概率论基础(第二版) 2009.8 严士健 王隽骧 刘秀芳 著
130 自相似集的结构 2010.1 周作领 瞿成勤 朱智伟 著
131 现代统计研究基础 2010.3 王启华 史宁中 耿 直 主编

132　图的可嵌入性理论(第二版)　2010.3　刘彦佩　著
133　非线性波动方程的现代方法(第二版)　2010.4　苗长兴　著
134　算子代数与非交换 L_p 空间引论　2010.5　许全华、吐尔德别克、陈泽乾　著
135　非线性椭圆型方程　2010.7　王明新　著
136　流形拓扑学　2010.8　马　天　著
137　局部域上的调和分析与分形分析及其应用　2011.6　苏维宜　著
138　Zakharov 方程及其孤立波解　2011.6　郭柏灵　甘在会　张景军　著
139　反应扩散方程引论(第二版)　2011.9　叶其孝　李正元　王明新　吴雅萍　著
140　代数模型论引论　2011.10　史念东　著
141　拓扑动力系统——从拓扑方法到遍历理论方法　2011.12　周作领　尹建东　许绍元　著

(O-4517.0101)

科学出版中心 数理分社
电话：(010) 64033664
Email：math-phy@mail.sciencep.com

销售分类建议：高等数学

www.sciencep.com



定 价：58.00 元